Asservissement des systèmes linéaires

Henri Bourlès

CNAM
e-mail: henri.bourles@cnam.fr

October 30, 2015

Référence

H. Bourlès, H. Guillard,

Commande des systèmes linéaires. Performance et robustesse

Ellipses, 2012.

I. Introduction

Ubiquité de l'automatique

Usines: chaînes de productions, robots

Métro automatique

Voitures: ABS

Avions (civils, militaires)

Ascenseurs

Autres exemples ?

Systèmes à événements discrets (SED)

Exemples:

- Ascenseur
- Métro automatique
- Machine-outil
- Billeterie automatique, etc.

"Systèmes continus"

Exemples:

- Régulation de la température d'un four (thermique)
- Régulation de la vitesse d'une voiture, du métro, du TGV (mécanique, électrotechnique, électronique)
- Régulation de la tension et de puissance fournies par un alternateur (mécanique, électrotechnique)
- Régulation en assiette, roulis, tangage d'un avion (mécanique, aéronautique, électronique)

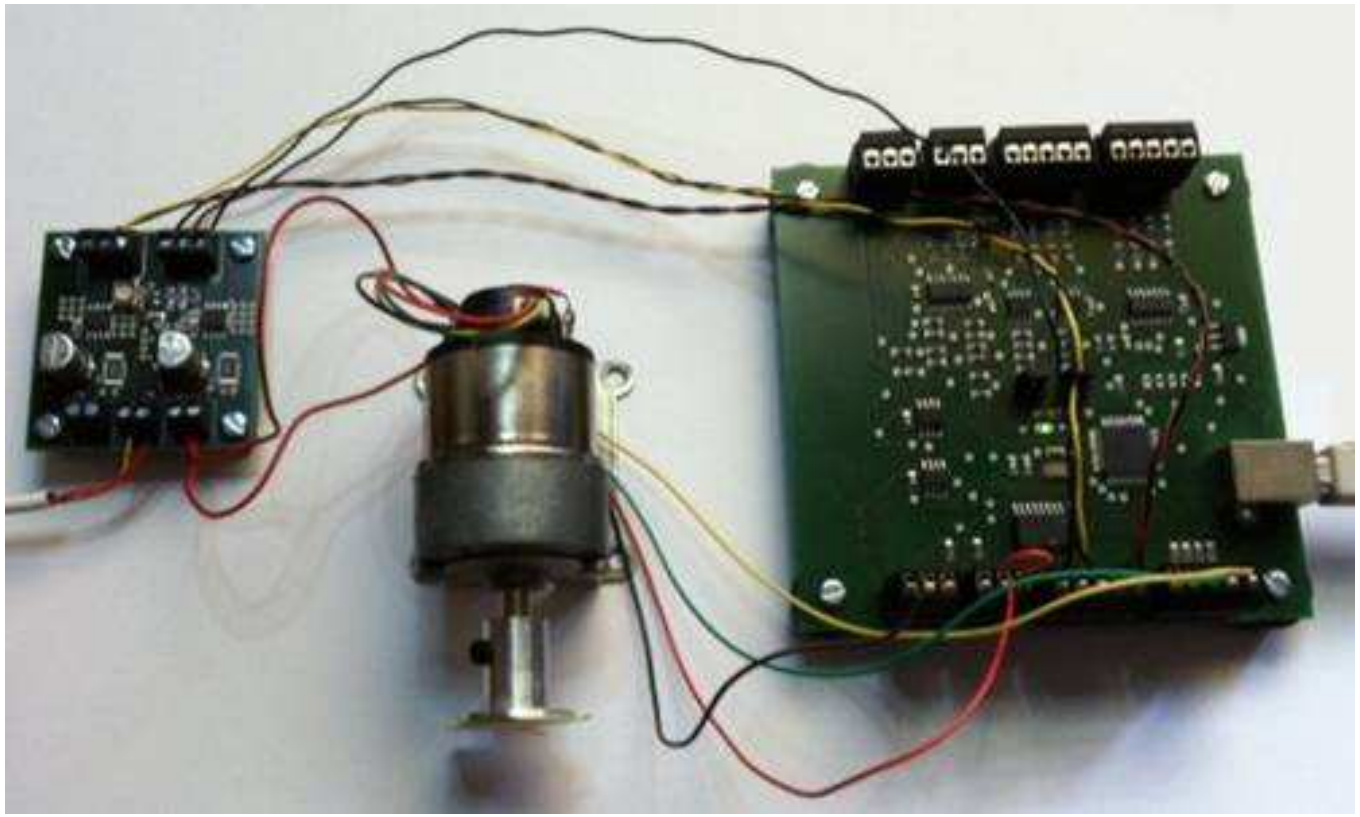


Figure 1: Asservissement d'un moteur à courant continu

Historique de l'automatique

- Antiquité, époque romaine: régulation du niveau d'eau dans les aqueducs (valves)

- 18ème siècle: James Watt (régulateur à boule)

- 19ème siècle: James C. Maxwell: "On Governors" (1868) "A governor is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uiform, notwithstanding variations in the driving-power or the resistance".

- 1ère moitié du 20ème siècle: automatique fréquentielle (Black, Nyquist, Bode, ingénieurs au laboratoire Bell)

- 1950: techniques d'échantillonnage (Shannon, Tsypkin, Jury)
- 1960: commande optimale, représentation d'état (Pontryagin, Bellman, Kalman)
- 1980: commande robuste (Doyle, Glover, Kharitonov,...)

Plan du cours

II. Généralités

Notion de système - Causalité - Linéarité - Stationnarité - Système bouclé

III. Transformation de Laplace

Définition, propriétés, fonction de Dirac, application à la résolution des EDO (équations différentielles ordinaires)

IV. Fonction de transfert

Définition, exemples, réponses fréquentielle, impulsionnelle, indicielle, gain statique

V. Systèmes du premier ordre

Analyse, réponses impulsionnelle, indicielle, fréquentielle (lieu de Bode)

VI. Systèmes du second ordre

Analyse, lieu des pôles, réponses impulsionnelle, indicielle, fréquentielle

VII. Systèmes d'ordre quelconque

Critère de stabilité, critère de Routh-Hurwitz, construction du diagramme de Bode

VIII. Systèmes en boucle fermée

Algèbre des diagrammes, stabilité en boucle fermée, critère du revers

IX. Compensation par avance de phase

Le problème - Solution : avance de phase - Régulateur proportionnel et dérivé

X. Régulateur proportionnel et intégral

Nécessité d'une action intégrale - Fonction de transfert d'un régulateur PI - Exemple - Exercices 1 et 2

XI Régulateur proportionnel, intégral et dérivé

II. Généralités

1. Notion de système

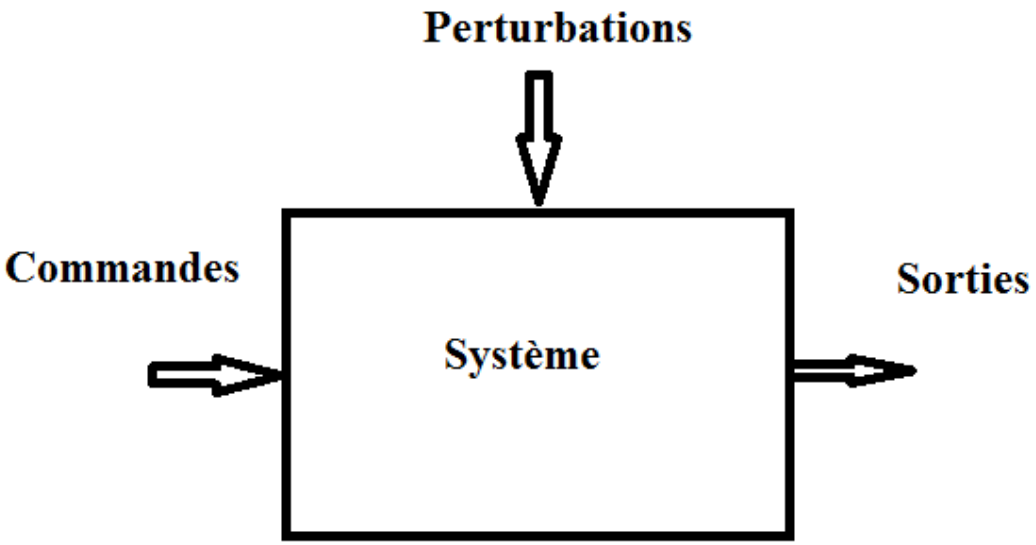


Figure 2: Schéma d'un système

Exemples

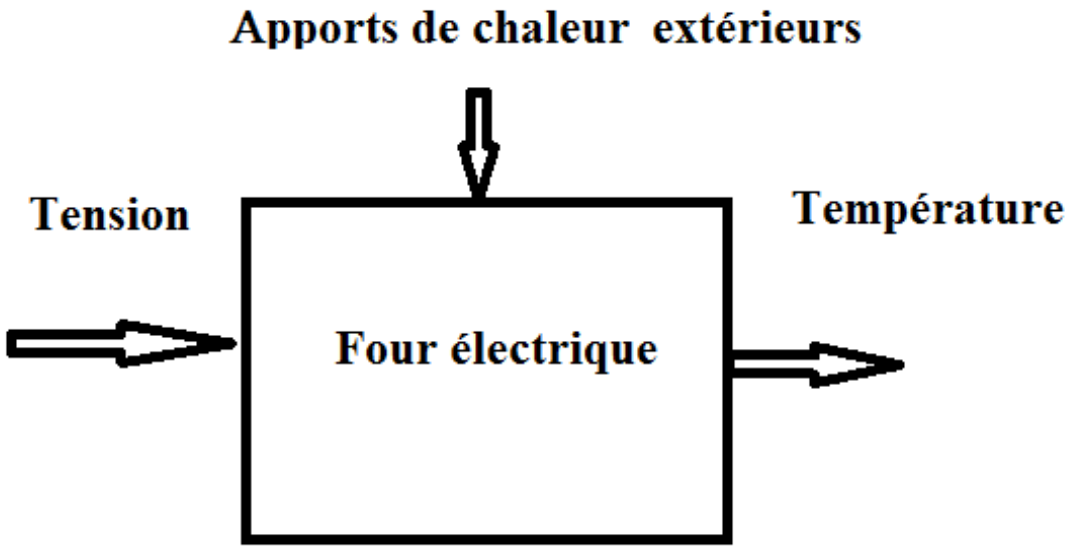


Figure 3: Four électrique

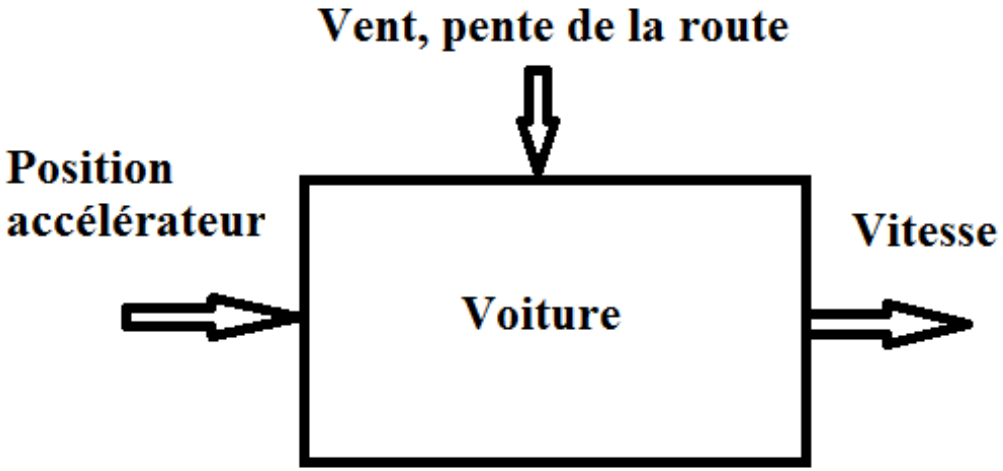


Figure 4: Voiture

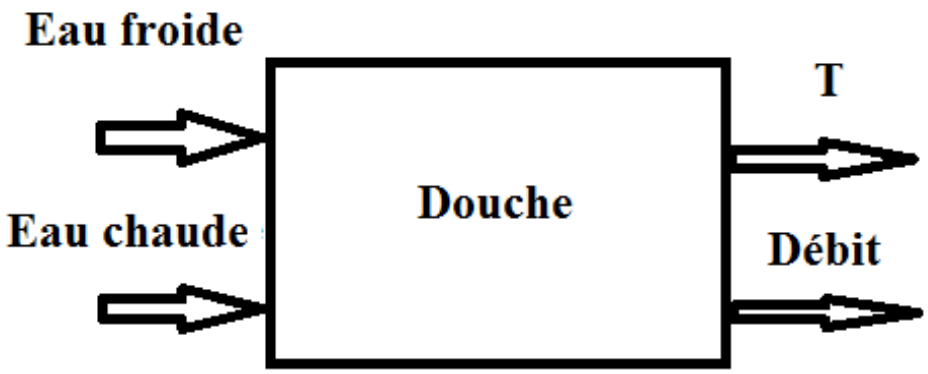


Figure 5: Douche

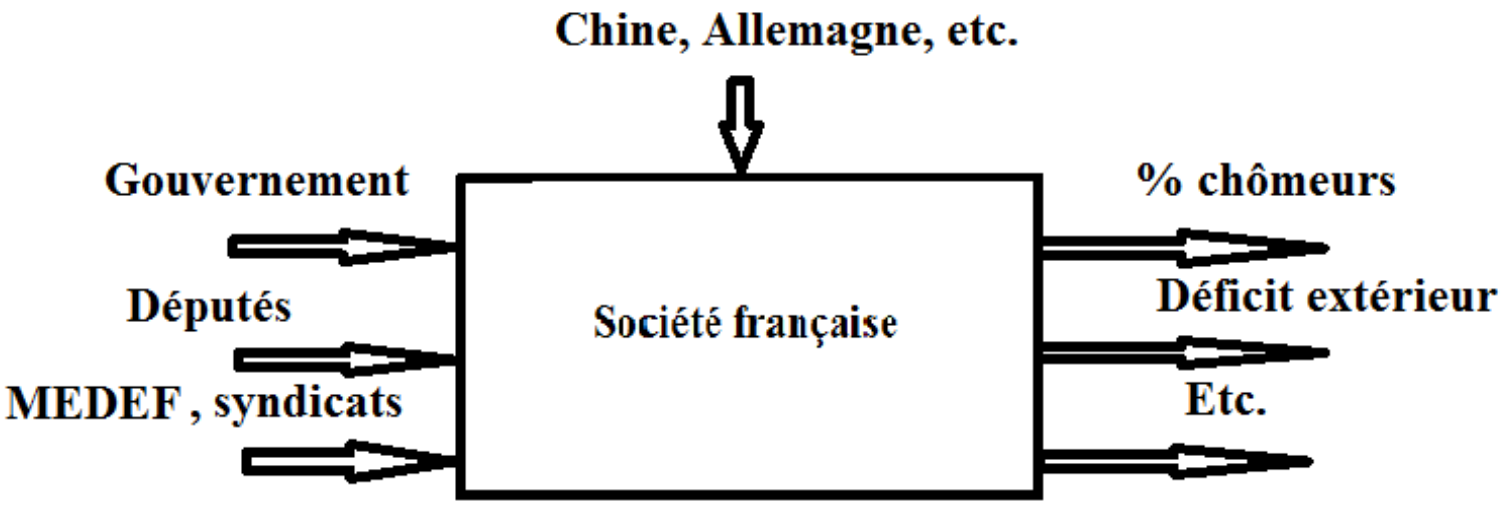


Figure 6: De l'art de gouverner...

2. Causalité

- Système causal: dont la sortie présente ne dépend que du présent et du passé.

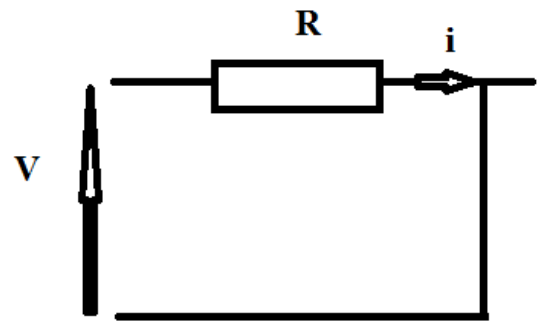


Figure 7: Circuit électrique

- Système strictement causal: dont la sortie présente ne dépend que du passé.

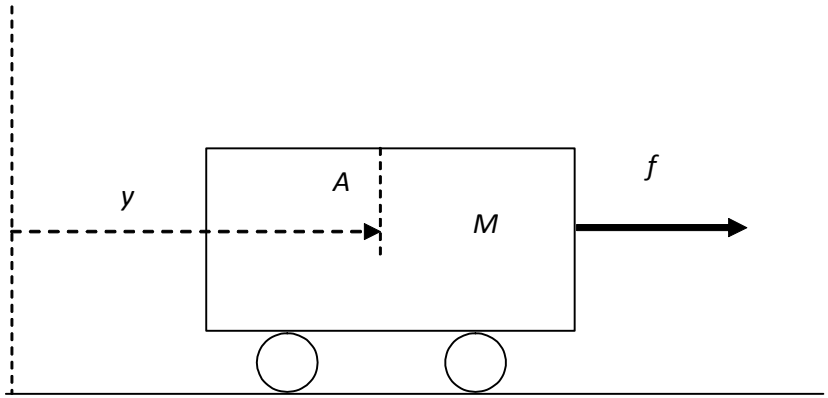


Figure 8: Chariot

- Système non causal

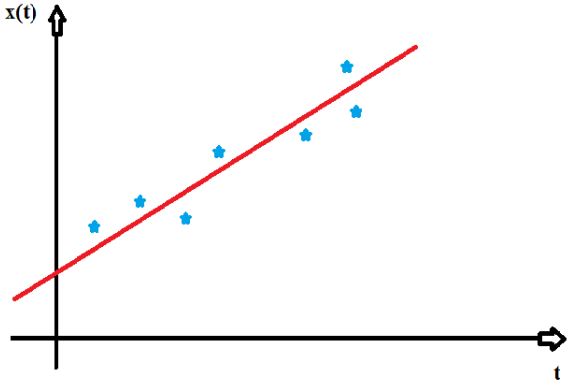


Figure 9: Interpolation



Figure 10: Boule de cristal

3. Linéarité

Exemple: $\dot{y} = a(t)\, y + b(t)\, u$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(t)\, y_1 + b(t)\, u_1 \\ \dot{y}_2 &= a(t)\, y_2 + b(t)\, u_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\alpha y_1 + \beta y_2) = a(t)(\alpha y_1 + \beta y_2) + b(t)(\alpha u_1 + \beta u_2)$$



Figure 11: Système linéaire - Principe de superposition

Exemple d'un système non linéaire:

$$\dot{y}(t) = a(t)\, y + b(t)\, u^n, \quad n > 1.$$

- Si n impair: on peut poser $v = u^n \longrightarrow$ linéarisation :

$$\dot{y}(t) = a(t)\, y + b(t)\, v.$$

- Si n est pair: le système est non linéarisable.

Système linéaire d'ordre n causal

= système d'équation

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = b_0(t)\, u^{(n)} + b_1(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)\, u}$$

= système strictement causal si $b_0 = 0$.

4. Stationnarité

Opérateur de retard r_τ :

$$(r_\tau x)(t) = x(t - \tau).$$

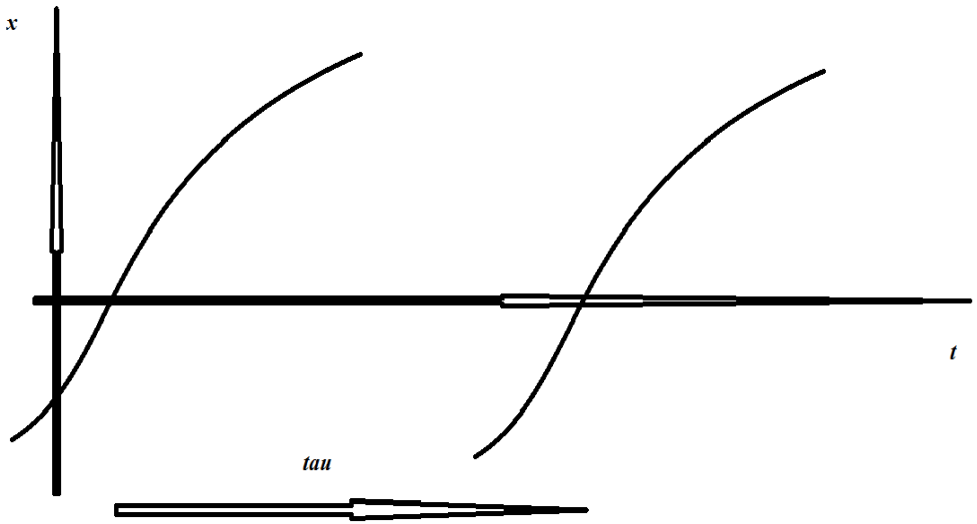


Figure 12: Retard tau

Définition d'un système stationnaire : A l'entrée retardée d'un laps de temps τ correspond la sortie retardée d'un laps de temps τ.

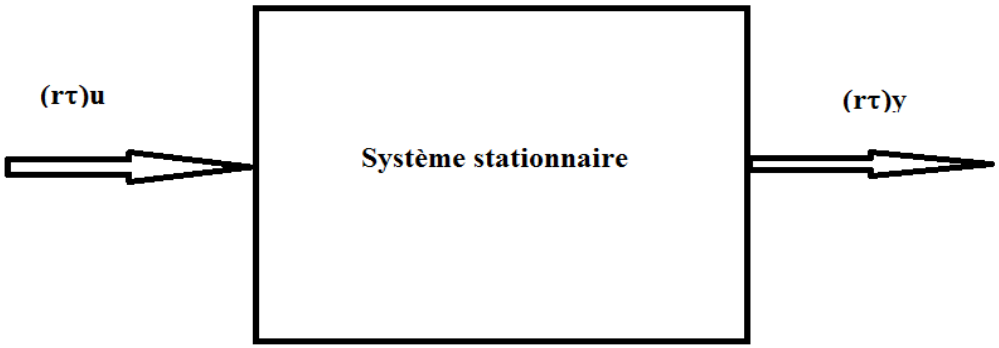


Figure 13: Définition d'un système stationnaire

Le système

$$y^{(n)}+a_1(t)\,y^{(n-1)}+...+a_n(t)\,y=b_0u^{(n)}+b_1(t)\,u^{(n-1)}+...+b_n(t)\,u$$

est stationnaire ssi les coefficients sont constants :

$$a_i(t)=C^{te},b_j(t)=C^{te}.$$

5. Système bouclé

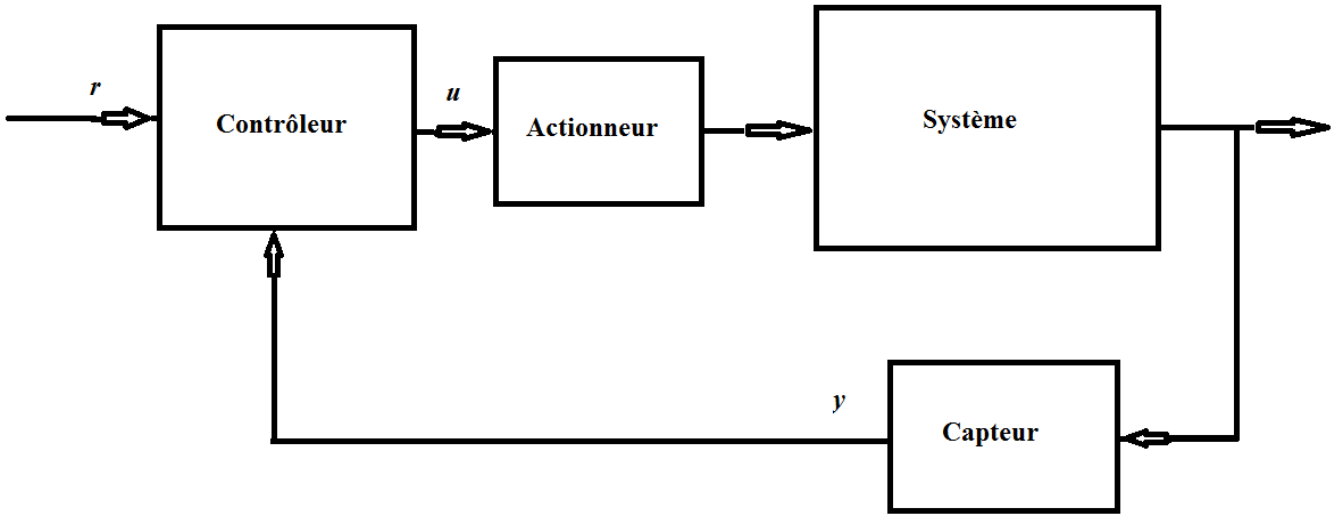


Figure 14: Système bouclé

r = signal de référence (consigne) ; u = commande ; y = sortie.

But de l'asservissement : - Rejet des perturbations.

- $e(t) := y(t) - r(t) \to 0 \ (t \to +\infty)$.

Contraintes

- Modèle $\neq$ réalité $\Rightarrow$ robustesse

- Convergence de $y(t)$ vers r avec

  - suffisamment de rapidité

  - suffisamment de précision (peu de dépassement sur un échelon de consigne)

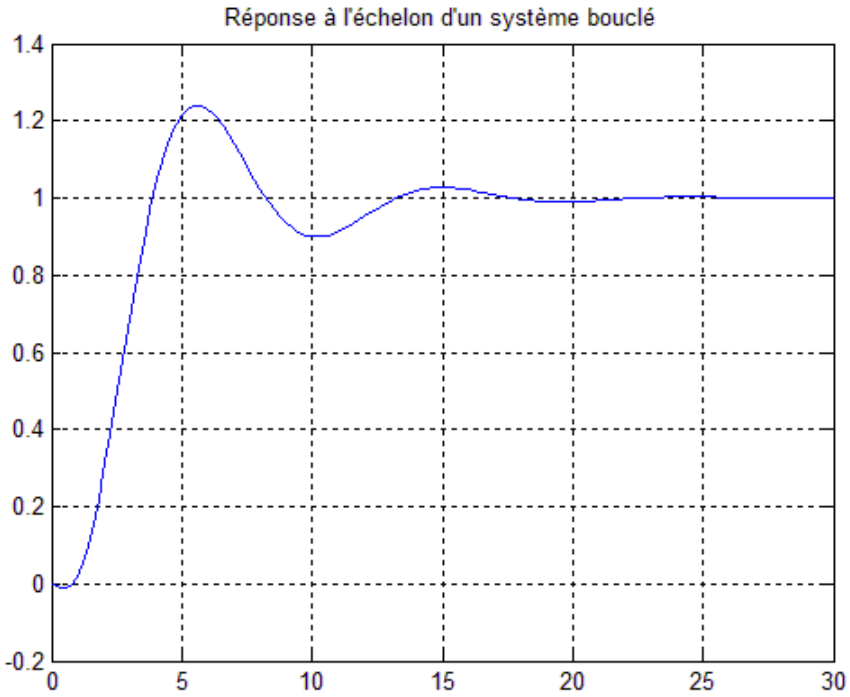


Figure 15: Dépassement $>$ 20%

III. La transformation de Laplace

1. Définition, propriétés

Fonction du temps nulle pour $t<0$	$\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}$	fonction de la variable complexe
$f(t)$	$\mapsto$	$\hat{f}(p)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}dt$
$\Upsilon(t):=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\geq 0\end{cases}$	$\mapsto$	$\frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}(p)>0$
$\int_{0^-}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\mapsto$	$\frac{\hat{f}(p)}{p}$
df/dt	$\mapsto$	$p\hat{f}(p)-f\left(0^-\right)$
$d^n f/dt^n$	$\mapsto$	$p^n\hat{f}(p)-\sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} f^{(i)}\left(0^-\right)$
$r_\tau f$	$\mapsto$	$e^{-\tau p}\hat{f}(p)$
$e^{-\alpha t}\Upsilon(t)$	$\mapsto$	$\frac{1}{p+\alpha}, \quad \mathrm{Re}(p)>-\alpha$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\Upsilon(t)$	$\mapsto$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \quad \mathrm{Re}(p)>-\alpha$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\,\Upsilon(t)$	$\mapsto$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \quad \mathrm{Re}(p)>-\alpha$

2. "Fonction" de Dirac

Fonction de Heaviside (échelon unité):

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

Fonction de Dirac:

$$\delta = \frac{d\Upsilon}{dt} \Leftrightarrow \Upsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \delta(\tau) = \begin{cases} 0, \tau \neq 0, \\ +\infty, \tau = 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1.$$

3. Convolution

f, g deux fonctions du temps. Produit de convolution de f et g :

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont nulles pour $t < 0$ ("fonctions causales")

$$(f \star g)(t) = \int_{0^-}^{t} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Convolution par δ : On suppose f continue dans un voisinage de 0. Pour tous $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$

$$(f \star \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, \delta(\tau)\, d\tau = \int_{-\varepsilon'}^{+\varepsilon''} f(t-\tau)\, \delta(\tau)\, d\tau$$

$$(f \star \delta)(t) \underset{\forall \varepsilon \in]-\varepsilon', \varepsilon''[}{=} f(t-\varepsilon) \int_{-\varepsilon'}^{+\varepsilon''} \delta(\tau)\, d\tau = f(t-\varepsilon) \Longrightarrow$$

$$\boxed{f \star \delta = f.}$$

Produit de convolution retardé

$$\begin{aligned}(r_\tau (f \star g))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f\left((t-\tau)-t'\right)}_{(r_\tau f)(t')} g\left(t'\right) dt' \\ &\underset{t''=t'+\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-t''\right) \underbrace{g\left(t''-\tau\right)}_{(r_\tau g)(t'')} dt''\end{aligned}$$

D'où:

$$\boxed{r_\tau (f \star g) = (r_\tau f) \star g = f \star (r_\tau g)}$$

En particulier:

$$r_\tau f = r_\tau (\delta \star f) = \underbrace{(r_\tau \delta)}_{=:\delta_\tau} \star f$$

Fonction de Dirac retardée : $r_\tau \delta = \delta_\tau$,

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} 0, t \neq \tau, \\ +\infty, t = \tau, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\tau(t)\, dt = 1.$$

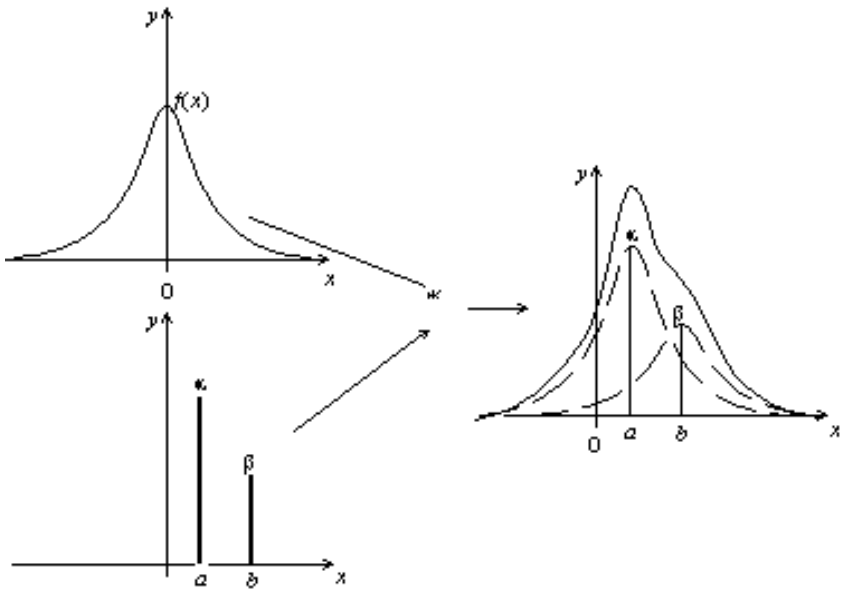


Figure 16: Convolution par une somme de fonctions de Dirac retardées

4. Propriétés de la transformation de Laplace (suite)

δ	$\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}$	1
δ_τ	$\mapsto$	$e^{-\tau p}$
$f \star g$	$\mapsto$	$\hat{f}(p)\,\hat{g}(p)$
$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$	$=$	$\lim\limits_{p\to 0} p\hat{f}(p)$
$f\left(0^+\right)$	$=$	$\lim\limits_{p\to\infty} p\hat{f}(p)$
$\lambda f + \mu g$	$\mapsto$	$\lambda\hat{f}(p) + \mu\hat{g}(p)$

5. Application à la résolution des EDO

- Exemple 1:

$$\dot{y} + 2y = 2, \quad y(0) = y_0.$$

- Exemple 2:

$$\dot{y} + 2y = 4t \quad y(0) = y_0.$$

Solution pour l'exemple 1:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) + 2y(t) &= 2 \Rightarrow \\
\dot{y}(t)\Upsilon(t) + 2y(t)\Upsilon(t) &= 2\Upsilon(t) \Rightarrow \\
p\hat{y}(p) - y_0 + 2\hat{y}(p) &= \frac{2}{p} \Rightarrow \\
(p+2)\hat{y}(p) &= y_0 + \frac{2}{p} \Rightarrow \\
\hat{y}(p) &= \frac{y_0}{p+2} + \frac{2}{p(p+2)}
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{p(p+2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+2}, \quad \alpha = \left.\frac{2}{p+2}\right|_{p=0} = 1, \beta = \left.\frac{2}{p}\right|_{p=-2} = -1$$

D'où

$$\begin{aligned} \hat{y}(p) &= (y_0 - 1)\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p} \Rightarrow \\ y(t)\,\Upsilon(t) &= (y_0 - 1)\,e^{-2t}\Upsilon(t) + \Upsilon(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y(t) = (y_0 - 1)\,e^{-2t} + 1.$$

Solution pour l'exemple 2:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) + 2y(t) &= 4t \Rightarrow \\
\dot{y}(t)\,\Upsilon(t) + 2y(t)\,\Upsilon(t) &= 4t\Upsilon(t) \Rightarrow \\
p\hat{y}(p) - y_0 + 2\hat{y}(p) &= \frac{4}{p^2} \Rightarrow \\
(p+2)\,\hat{y}(p) &= y_0 + \frac{4}{p^2} \Rightarrow \\
\hat{y}(p) &= \frac{y_0}{p+2} + \frac{4}{p^2(p+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{p^2(p+2)} &= \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{p+2}, \quad \alpha = \left.\frac{4}{p+2}\right|_{p=0} = 2, \gamma = \left.\frac{4}{p^2}\right|_{p=-2} = 1 \\
p &= -1 \Rightarrow 4 = \alpha - \beta + \gamma \\
&\Rightarrow \beta = \alpha + \gamma - 4 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(p) &= \frac{y_0+1}{p+2}+\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p} \Rightarrow \\ y(t)\,\Upsilon(t) &= (y_0+1)\,e^{-2t}\Upsilon(t)+(2t-1)\,\Upsilon(t) \end{aligned}$$

$$y(t)=(y_0+1)\,e^{-2t}+2t-1.$$

IV. Fonction de transfert

1. Définition

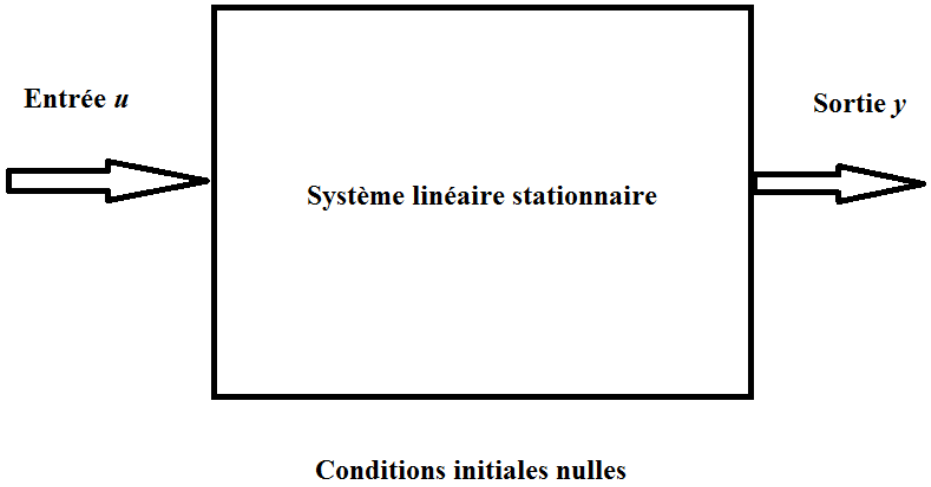


Figure 17: Système linéaire stationnaire

Théorème et définition: A conditions initiales nulles, il existe une fonction de la variable complexe $G(p)$ unique telle que

$$\boxed{\hat{y}(p) = G(p)\,\hat{u}(p)}$$

$G(p) =$ fonction de transfert du système.

2. Exemples

a) Système du second ordre

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + a_1\frac{dy}{dt}(t) + a_2 y(t) = b_1\frac{du}{dt}(t) + b_2 u(t)$$

a_1, a_2, b_1, b_2 : coefficients constants

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y) &= \hat{y}(p), \quad \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) = p\hat{y}(p) - \underbrace{y(0)}_{0} = p\hat{y}(p), \quad \mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = p^2\hat{y}(p) \\
\mathcal{L}(u) &= \hat{u}(p), \quad \mathcal{L}\left(\frac{du}{dt}\right) = p\hat{u}(p) \\
&\Rightarrow \left(p^2 + a_1 p + a_2\right)\hat{y}(p) = (b_1 p + b_2)\,\hat{u}(p)
\end{aligned}$$

$$G(p) = \frac{b_1 p + b_2}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

b) Système d'ordre n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + ... + b_n u \qquad (1)$$

$$\partial : y \mapsto \partial y := \dot{y}, \quad u \mapsto \partial u := \dot{u}$$

$$(1) \Leftrightarrow \underbrace{\left(\partial^n + a_1 \partial^{n-1} + ... + a_n\right)}_{:=D(\partial)} y = \underbrace{\left(b_1 \partial^{n-1} + ... + b_n\right)}_{:=N(\partial)} u$$

$$\boxed{\hat{y}(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} \hat{u}(p)}$$

c) Remarque

La fonction de transfert $\frac{N(p)}{D(p)}$ n'est pas toujours irréductible.

Exemple:

$$\begin{aligned} \ddot{y} - y &= \dot{u} - u \\ \underbrace{\left(\partial^2 - 1\right)}_{D(\partial)} y &= \underbrace{(\partial - 1)}_{N(\partial)} u \\ G(p) &= \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{p-1}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

e) Système retardé

$$\frac{dy}{dt}(t) + a_1 y(t) = b_1 u(t-\tau)$$

$$u(t-\tau) = (r_\tau u)(t) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} e^{-\tau p}\hat{u}(p)$$

$$(p + a_1)\,\hat{y}(p) = e^{-\tau p} b_1 \hat{u}(p)$$

$$\boxed{G(p) = \frac{b_1 e^{-\tau p}}{p + a_1}}$$

3. Réponse fréquentielle

Entrée sinusoïdale:

$$\begin{aligned} u(t) &= U\cos(\omega t+\phi) \\ &= \mathrm{Re}\left(\underbrace{Ue^{i(\omega t+\phi)}}_{:=\tilde{u}(t)}\right) \end{aligned}$$

Cas d'un système du second ordre:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t) &= b_1\dot{u}(t)+b_2u(t) \\ &= \mathrm{Re}\left(b_1\frac{d}{dt}\tilde{u}(t)+b_2\tilde{u}(t)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Re}\left(\tilde{y}(t)\right), \\ \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}(t)+a_1\frac{d\tilde{y}}{dt}(t)+a_2\tilde{y}(t) &= b_1\frac{d}{dt}\tilde{u}(t)+b_2\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

$$\tilde{u}(t) = Ue^{i(\omega t+\phi)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = i\omega Ue^{i(\omega t+\phi)}$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}(t) + a_1\frac{d\tilde{y}}{dt}(t) + a_2\tilde{y}(t) = (b_1 i\omega + b_2)\,\tilde{u}(t)$$

Cherchons $\tilde{y}(t)$ de la forme $Ye^{i(\omega t+\psi)}$

$$\left((i\omega)^2 + a_1 i\omega + a_2\right)\tilde{y}(t) = (b_1 i\omega + b_2)\,\tilde{u}(t) \Rightarrow$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{b_1 i\omega + b_2}{(i\omega)^2 + a_1 i\omega + a_2}\tilde{u}(t)$$

$$\boxed{\tilde{y}(t) = G(i\omega)\,\tilde{u}(t)}$$

$\mathbb{R} \ni \omega \mapsto G(i\omega) \in \mathbb{C}$: Réponse fréquentielle

$G(i\omega) \in \mathbb{C}$: la réponse fréquentielle a donc une partie réelle et une partie imaginaire. Ou:

$$G(i\omega) = |G(i\omega)| \, e^{i \arg(G(i\omega))}.$$

En décibels:

$$|G(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(i\omega)|$$

$\arg(G(i\omega))$ souvent exprimé en degrés

$$\arg(G(i\omega))_{\text{deg}} = \frac{180}{\pi} \arg(G(i\omega))_{\text{rad}}$$

Fréquence: $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

$$G(-i\omega) = \overline{G(i\omega)}$$

$\Rightarrow$ seules les fréquences positives ont une réalité physique.

4. Réponse impulsionnelle

A conditions initiales nulles,

$$\hat{y}(p) = G(p)\,\hat{u}(p)$$

Si $u = \delta$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(p) &= 1 \Rightarrow \\ \hat{y}(p) &= G(p) \Rightarrow \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} := g(t) \end{aligned}$$

$g := \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$: Réponse impulsionnelle du système

5. Réponse indicielle

Problème: l'entrée $u = \delta$ n'est pas physiquement réalisable.

Si $u = \Upsilon$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(p) &= \frac{1}{p} \Rightarrow \\ \hat{y}(p) &= \frac{G(p)}{p} \Rightarrow \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(p)}{p}\right\} := I(t) \end{aligned}$$

$I := \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}$: Réponse indicielle du système

Relation avec la réponse impulsionnelle:

$$g = \frac{dI}{dt} \Leftrightarrow I(t) = \int_{0^-}^{t} g(\tau)\, d\tau.$$

6. Gain statique

Entrée $u(t) = U\Upsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(p) = \frac{U}{p}$.

Si $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ existe: par le théorème de la valeur finale

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} y(t) &= \lim_{p\to 0} p\hat{y}(p) \\ &= \lim_{p\to 0} p\left(G(p)\frac{U}{p}\right) \\ &= G(0)U\end{aligned}$$

$G(0) =$ gain statique $= G(i\omega)|_{\omega=0}$.

V. Systèmes du premier ordre

1) Analyse

$$G(p) = \frac{b}{p+a}, \quad b \neq 0.$$

Réponse indicielle:

$$I(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right).$$

Si $a \neq 0$:

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{b/a}{p} - \frac{b/a}{p+a}$$

$$I(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)\Upsilon(t)$$

Si $a < 0$: $\lim_{t \to +\infty} |I(t)| = +\infty$: système instable

Si $a > 0$: $\lim_{t \to +\infty} I(t) = b/a$: système stable

Si $a = 0$: $G(p) = \frac{b}{p}$: système intégrateur, instable.

Dans la suite, on suppose $a, b > 0$ et on écrit

$$G(p) = \frac{b/a}{1 + (1/a)\, p} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

- $k = b/a$: gain statique
- $\tau = 1/a$: constante de temps

2) Tracé de la réponse impulsionnelle

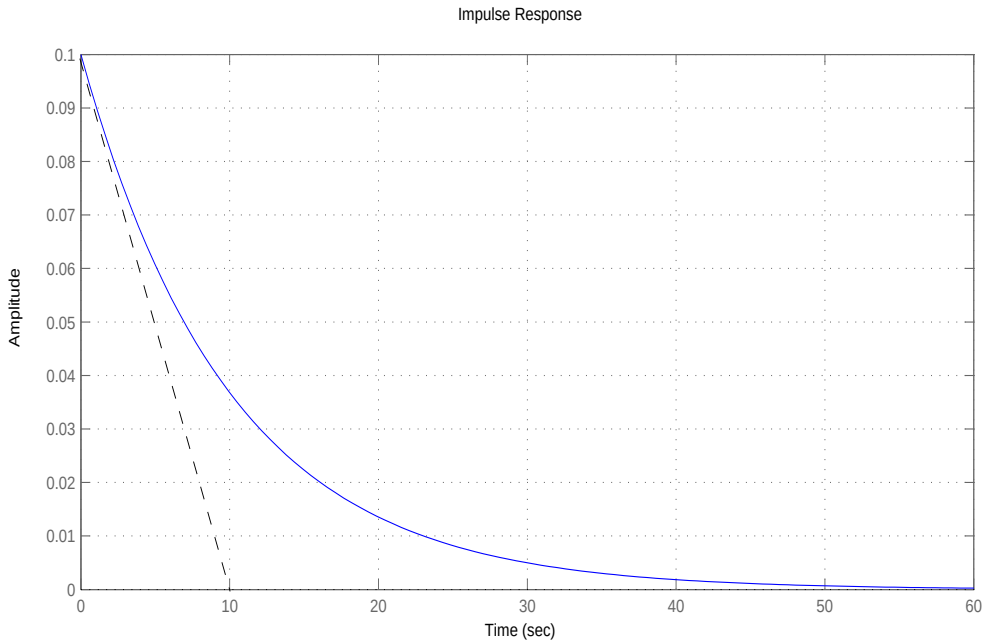


Figure 18: Réponse impulsionnelle

$$G(p) = \frac{1}{1 + 10p}$$

2) Tracé de la réponse indicielle

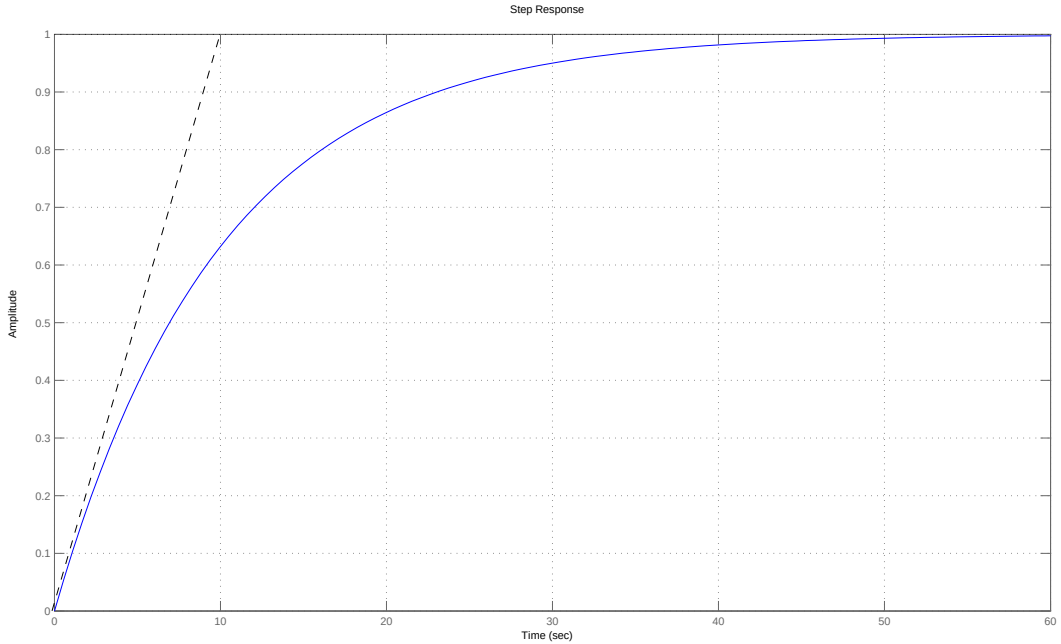


Figure 19: Réponse indicielle

$$G(p) = \frac{1}{1 + 10p}$$

3) Réponse fréquentielle

Lieu de Bode:

1. $|G(i\omega)|_{\text{dB}}$ en fonction de ω (échelle logarithmique)

2. $\arg(G(i\omega))_{\text{deg}}$ en fonction de ω (échelle logarithmique)

$$|G(i\omega)| = \frac{k}{|1+i\tau\omega|} = \frac{k}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}.$$

$\omega \to 0$: $|G(i\omega)| \to k$, $|G(i\omega)|_{\text{dB}} \to 20\log_{10}(k)$

$\omega \to +\infty$:

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &\sim \frac{k}{\tau\omega}, \\ |G(i\omega)|_{\mathsf{dB}} &\sim 20\log_{10}(k) - 20\log_{10}(\tau\omega) \\ &= 20\log_{10}(k) - 20\log_{10}(\tau) - 20\log_{10}(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &\to 0 \\ &\Leftrightarrow |G(i\omega)|_{\mathsf{dB}} \to -\infty \end{aligned}$$

avec une pente de $-20\,\mathsf{dB}$ /décade

$$G(i\omega) = \frac{1}{1 + i\tau\omega} \Rightarrow \arg(G(i\omega)) = -\arctan(\tau\omega).$$

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow 0 \Rightarrow \arg(G(i\omega)) \rightarrow 0 \\ \omega &\rightarrow +\infty \Rightarrow \arg(G(i\omega)) \rightarrow -\pi/2 = -90^\circ. \end{aligned}$$

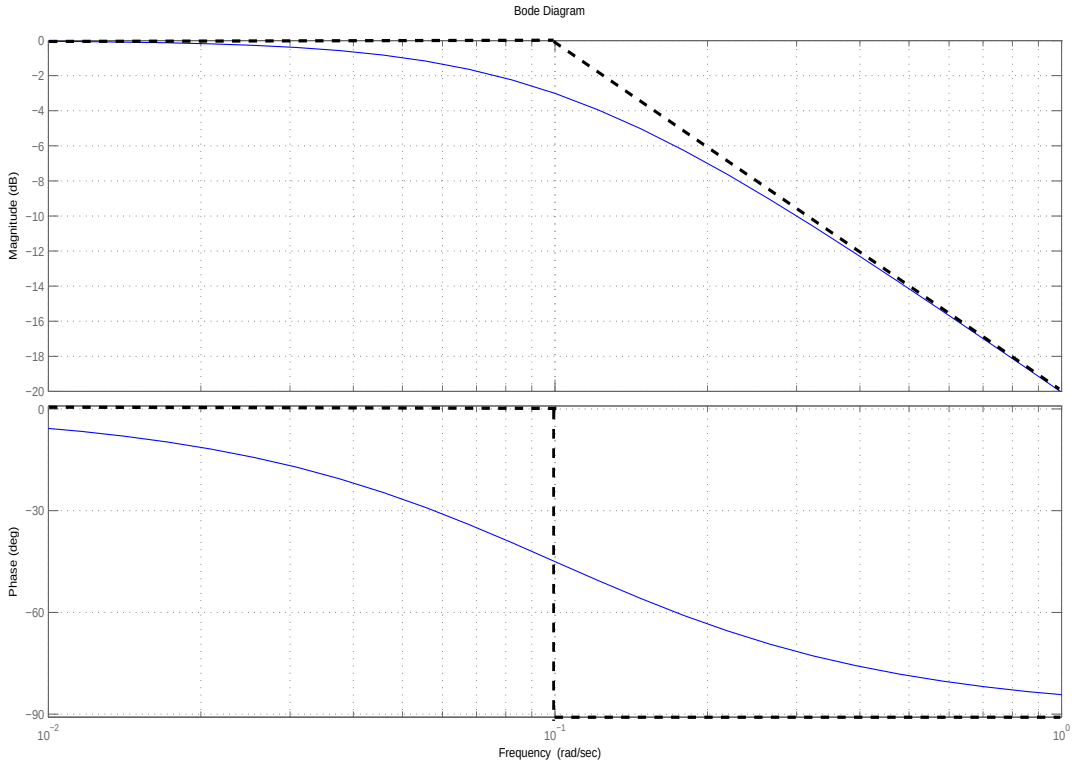


Figure 20: Lieu de Bode

$$G(p) = \frac{1}{1 + 10p}$$

VI. Systèmes du second ordre

1) Analyse

$$G(p) = \frac{b_1 p + b_2}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Dans ce qui suit, $b_1 = 0$, $b_2 > 0$, $a_2 > 0$.

On pose $a_2 = \omega_0^2$, $b_2 = k\omega_0^2$, $a_1 = 2\varsigma\omega_0$, $\omega_0 > 0$. D'où

$$G(p) = k\frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}.$$

$k =$ gain statique

Calcul des pôles = racines de $D(p)$

$$D(p) = p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2.$$

$$\Delta' = \zeta^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \left(\varsigma^2 - 1\right)\omega_0^2.$$

- Si $|\zeta| > 1$: pôles réels. Le système du second ordre se décompose en "somme' de deux systèmes du 1er ordre.

- Si $|\zeta| < 1$: Nouvelle situation.

Racines dans le cas $|\zeta| < 1$:

$$\omega_0 \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2} \right)$$

- Si $\zeta < 0$: exponentielle divergente: instable.
- Si $\zeta > 0$: exponentielle convergente ; ζ = coefficient d'amortissement.

ω_0 = pulsation propre non amortie

ω_p : $= \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} =$ pulsation propre (naturelle)

2) Lieu des pôles

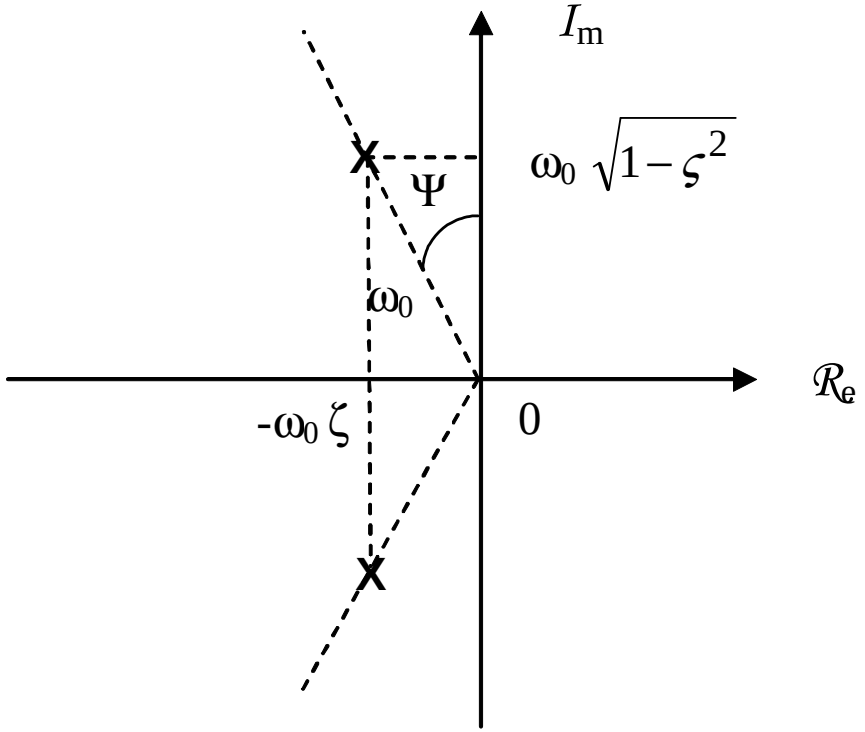


Figure 21: Lieu des pôles : système du second ordre

3) Réponse impulsionnelle

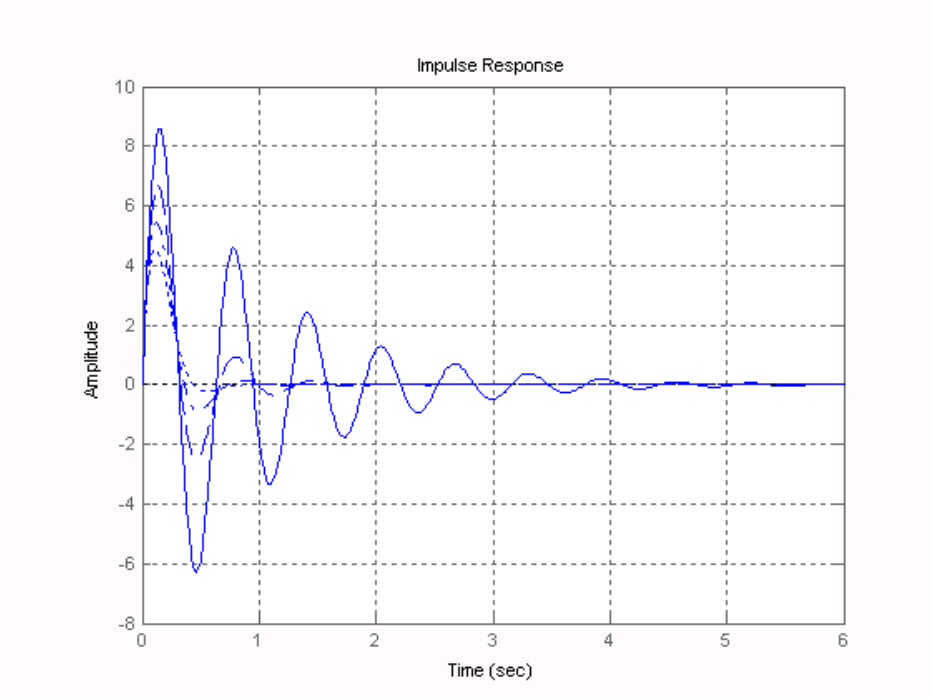


Figure 22: Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre

$\zeta = 0,1$ ('-'), $0,3$ ('- -'), $0,5$ ('-.'), $0,7$ (':').

4) Réponse indicielle

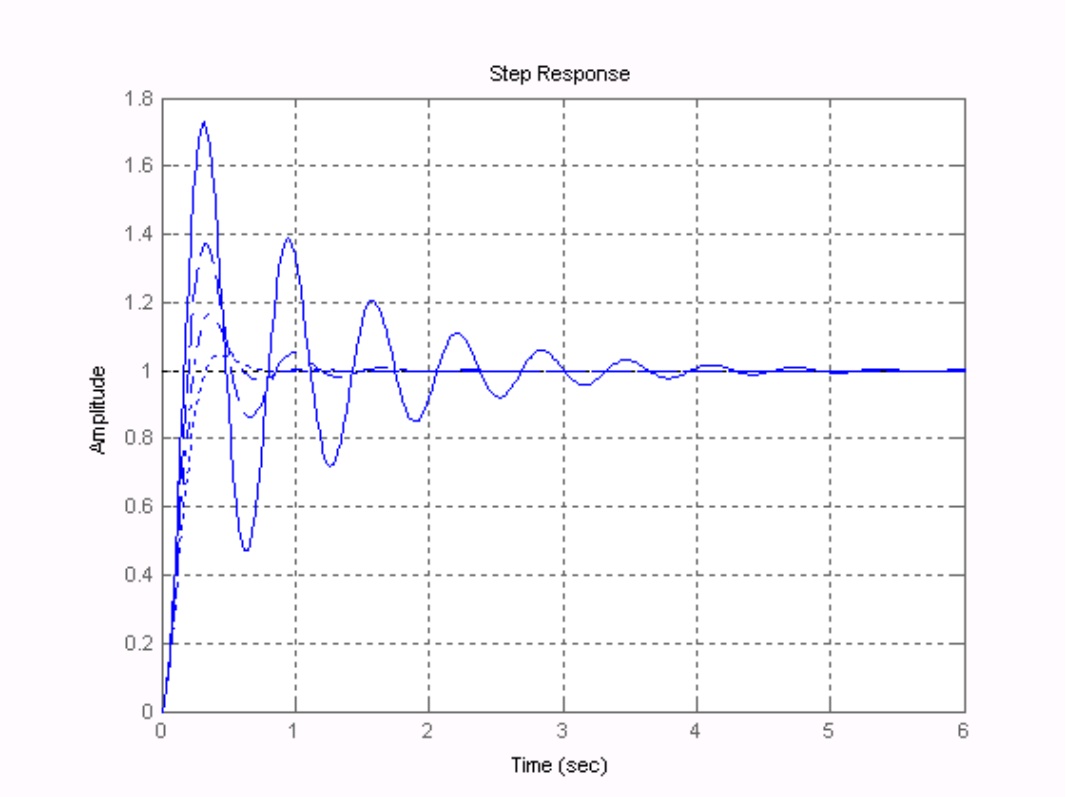


Figure 23: Réponse indicielle d'un système du second ordre

$\zeta = 0,1$ ('-'), $0,3$ ('- -'), $0,5$ ('-.'), $0,7$ (:).

5) Réponse fréquentielle

Etude du phénomène de résonance

Système du second ordre de gain statique unitaire :

$$G(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} \Rightarrow G(i\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega}.$$

$\upsilon := \omega/\omega_0$: fréquence normalisée.

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{1}{1 - \upsilon^2 + 2i\zeta\upsilon} \Rightarrow \\ |G(i\omega)|^2 &= \frac{1}{\left(1 - \upsilon^2\right)^2 + 4\zeta^2\upsilon^2}. \end{aligned}$$

Soit $D(\varpi) = (\varpi - 1)^2 + 4\zeta^2\varpi$. $|G(i\omega)|^2$ est maximum ssi $D(\varpi)$ est minimum avec $\varpi = \upsilon^2 \geq 0$.

$$\frac{dD}{d\varpi} = 2(\varpi - 1) + 4\zeta^2 = 2\left[\varpi - \left(1 - 2\zeta^2\right)\right]$$

s'annule ssi $2\zeta^2 \leq 1 \Leftrightarrow \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} :=$ amortissement critique

Si $\zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\varpi} &= 0 \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Leftrightarrow \\ \omega &= \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2} := \omega_r. \\ \omega_r &= \text{ pulsation de résonance} \end{aligned}$$

Facteur de résonance :

$$|G(i\omega_r)|^2 = \left.\frac{1}{\left(1-v^2\right)^2+4\zeta^2v^2}\right|_{v^2=1-2\zeta^2}$$
$$= \frac{1}{4\zeta^4+4\zeta^2\left(1-2\zeta^2\right)} = \frac{1}{4\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)}$$

$$\boxed{|G(i\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

= facteur de résonance (parfois exprimé en dB)

Lieu de Bode

$$G(i\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega}$$

$\omega \to 0 : G(i\omega) \sim 1 : |G(i\omega)|_{\text{dB}} \to 0$, $\arg(G(i\omega)) \to 0°$.

$\omega \to +\infty : G(i\omega) \sim -\omega_0^2/\omega^2 : |G(i\omega)|_{\text{dB}} \sim -40 \log_{10}(\omega/\omega_0)$.

$\Rightarrow$ Pente de -40 db /décade

$\arg(G(i\omega)) \to -\pi = -180°$.

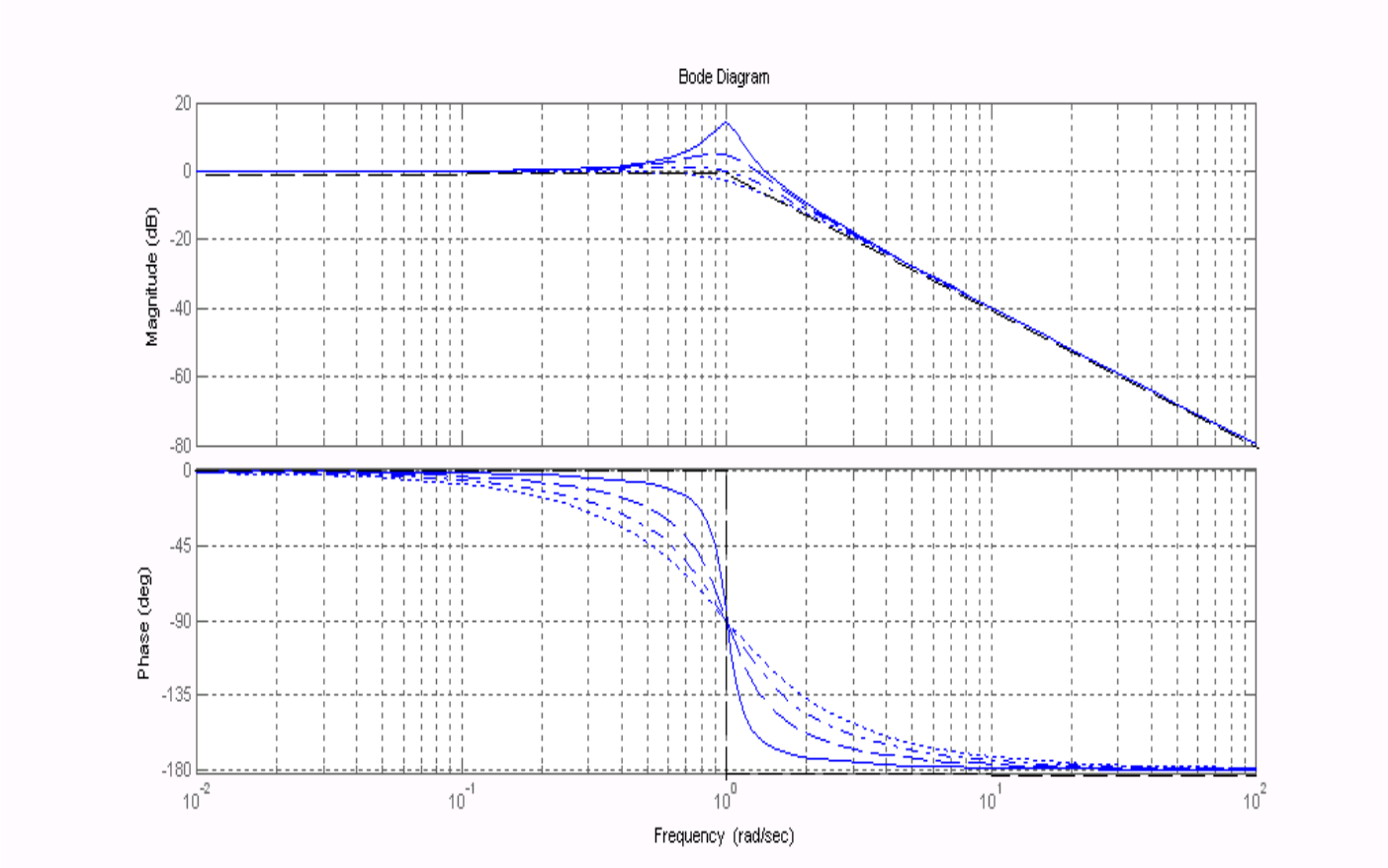


Figure 24: Réponse fréquentielle d'un système du second ordre

$\zeta = 0,1$ ('-'), $0,3$ ('- -'), $0,5$ ('-.'), 0.7 (:). $\omega_0 = 1$.

VII. Systèmes d'ordre quelconque

$$\begin{aligned} D(\partial)\, y &= N(\partial)\, u, \\ D(\partial) &= \partial^n + a_1 \partial^{n-1} + \ldots + a_n, \\ N(\partial) &= b_1 \partial^{n-1} + \ldots + b_n. \end{aligned}$$

Hypothèse: $D(\partial)$ et $N(\partial)$ premiers entre eux.

Fonction de transfert :

$$\boxed{G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}}$$

- Pôles du système: racines de $D(p)$.

- Zéros du système: racines de $N(p)$.

Définition 1 *Le système est stable si, à une entrée bornée u, correspond un sortie bornée y.*

Théorème 2 *Le système est stable si, et seulement si ses pôles appartiennent tous au demi-plan gauche $\mathbb{C}^- = \{p \in \mathbb{C} : \Re(p) < 0\}$.*

Rappel: $D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n$

Théorème 3 *Pour que le système soit stable, il est nécessaire que $a_i > 0, \forall i$. Cette condition est suffisante dans le cas des systèmes du premier et du second ordre.*

Critère de Routh-Hurwitz

On écrit $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_n, a_0 > 0$. On forme pour $k \in \{1, ..., n\}$

$$\Delta_k = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & a_5 & a_4 & \ddots & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_k \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est $\Delta_k > 0, \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Exemples

(1) $D(p) = p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$.

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3, \Delta_3 = a_3 \Delta_2$.

Condition $\Delta_1 > 0 : a_1 > 0$. Condition $\operatorname{sgn}(\Delta_3) = \operatorname{sgn}(\Delta_2) : a_3 > 0$.
Condition $\Delta_2 > 0 : a_2 > a_3/a_1 > 0$.

(2) $D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 1$.

(3) $D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + p - 1$.

(4) $D(p) = p^4 + p^3 + p^2 + 2p + 1$.

(5) $D(p) = p^4 + p^3 + 2p^2 + p + 3$.

Construction du diagramme de Bode

Décomposition de la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{\prod_k N_k(p)}{\prod_k D_k(p)}$$

$\frac{1}{N_k(p)}$ et $\frac{1}{D_k(p)}$: fonctions de transfert du premier ordre, ou du second ordre ayant deux pôles complexes conjugués.

$$\begin{aligned}
\log_{10}|G(i\omega)| &= \sum_k \log_{10}\left|\frac{1}{D_k(i\omega)}\right| - \sum_k \log_{10}\left|\frac{1}{N_k(i\omega)}\right|, \\
\arg G(i\omega) &= \sum_k \arg\left(\frac{1}{D_k(i\omega)}\right) - \sum_k \arg\left(\frac{1}{N_k(i\omega)}\right).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ obtention des courbes de $G(p)$ (amplitude et phase) à partir des courbes de Bode des fonctions de transfert élémentaires $\frac{1}{N_k(p)}$ et $\frac{1}{D_k(p)}$.

Méthode :

i) Déterminer les abscisses des "points de cassure" du diagramme asymptotique, c'est-à-dire les modules des pôles et des zéros. Les placer sur l'axe des abscisses.

ii) Pour chacun des points de cassure, appliquer la règle suivante pour la variation de pente de l'amplitude et la variation de phase:

	Pôle stable	Pôle instable	Zéro stable	Zéro instable
Δ (pente)	-20 dB/déc.	-20 dB/déc.	20 dB/déc.	20 dB/déc.
Δ (phase)	-90°	90°	90°	-90°

Tableau de la règle des cassures

Exemple 1

$$G(p) = \frac{100\ (p-1)}{p\ (p+10)}.$$

- Points de cassure: $\omega = 0$ (correspondant au pôle $p = 0$), $\omega = 1$ (correspondant au zéro instable $p = 1$) et $\omega = 10$ (correspondant au pôle stable $p = -10$).

- Diagramme asymptotique de Bode dans les basses fréquences : pour $\omega \to 0$, $G(i\omega) \sim \frac{-10}{i\omega}$. Amplitude : pente -20 dB/décade passant par le point $(\omega = 1, |G|_{\text{dB}} = 20)$. Phase : 90° (modulo 360°).

- Le reste du diagramme s'obtient en appliquant la "règle des cassures".

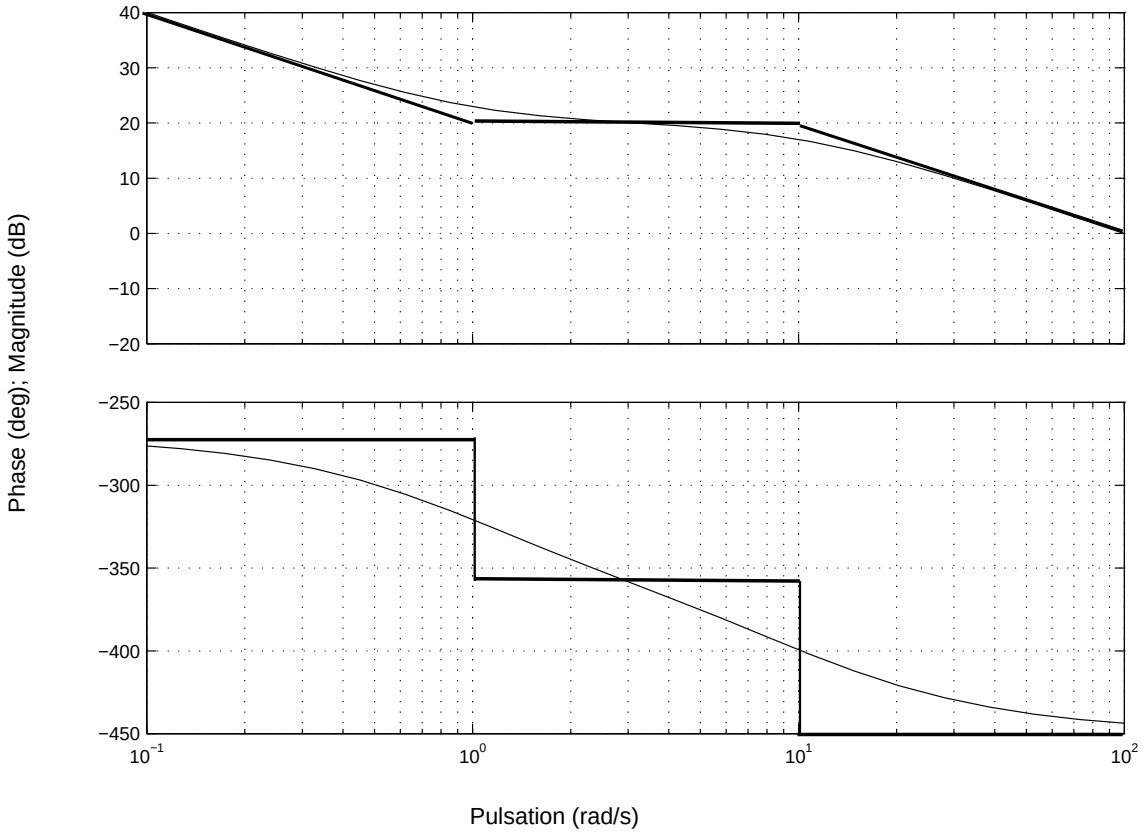


Figure 25: Diagramme de Bode: Exemple 1.

Exemple 2

$$G(p) = \frac{p\,(p+10)}{\left(p^2 - p + 100\right)\,(p+1)}.$$

- Points de cassure: $\omega = 0$ (correspondant au zéro $p = 0$), $\omega = 1$ (correspondant au pôle stable $p = -1$) et $\omega = 10$ (correspondant au zéro stable $p = -10$ ainsi qu'aux deux pôles complexes conjugués instables de module 10).

- Diagramme asymptotique dans les basses fréquences : pour $\omega \to 0$, $G(i\omega) \sim \frac{i\omega}{10}$. Amplitude : pente de 20 dB/décade passant par le point $(\omega = 1, |G|_{\text{dB}} = -20)$. Phase : 90°.

- Le point de cassure $\omega = 1$: pas de difficulté.

- Au point de cassure $\omega = 10$, on doit comptabiliser

  - l'action du zéro, qui provoque une variation de pente d'amplitude de $+20$ dB/décade et une variation de phase de $+90^\circ$;

  - l'action des deux pôles complexes conjugués, qui provoquent une variation de pente d'amplitude de -40 dB/décade et une variation de phase de $+180^\circ$;

  soit en tout : une variation de pente d'amplitude de -20 dB/décade et une variation de phase de $+270^\circ$.

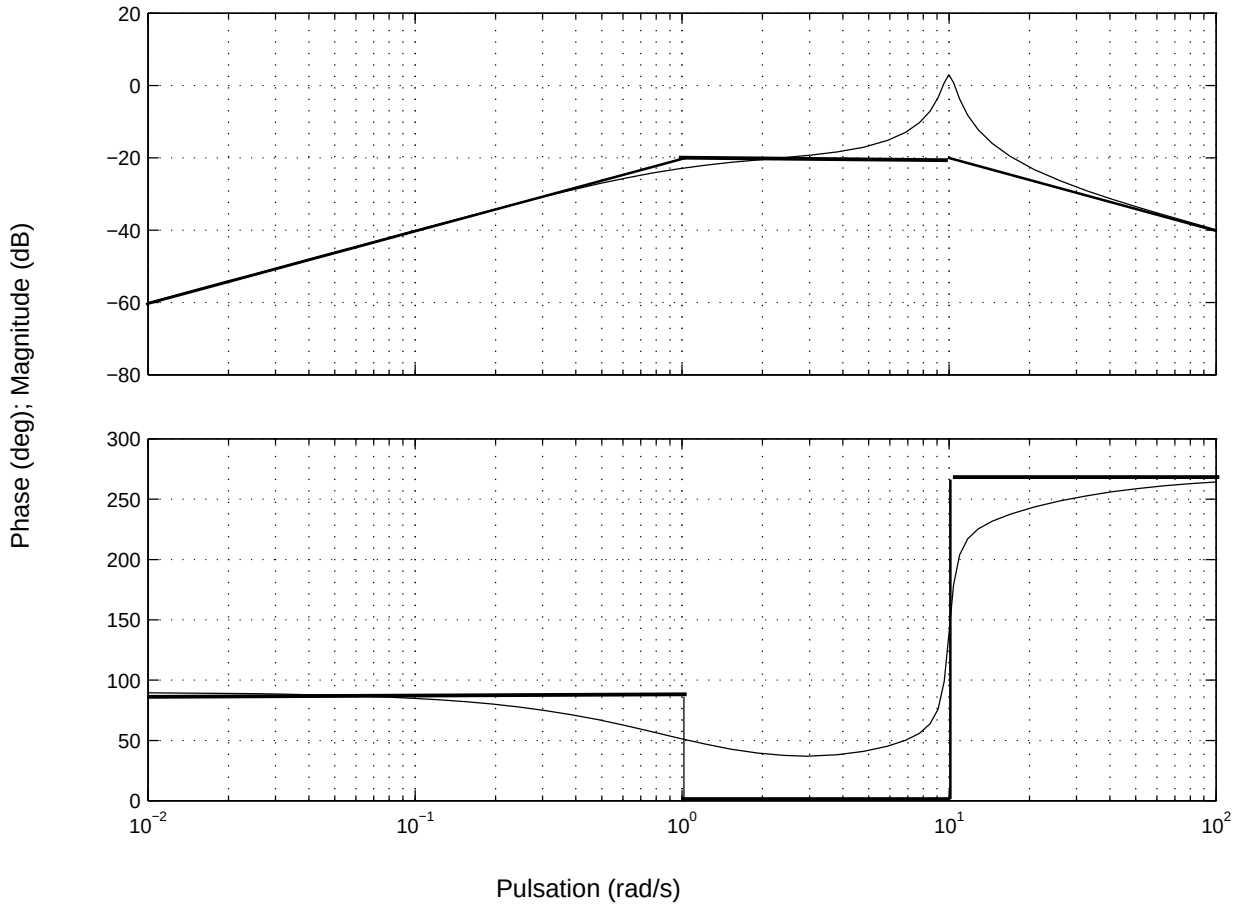


Figure 26: Diagramme de Bode - Exemple 2

Autres exemples

3)

$$G(p) = \frac{p + 10}{p(p + 1)(p + 0.1)}.$$

4)

$$G(p) = \frac{5p + 10}{p\left(p^3 + 3p^2 + 4p + 2\right)}$$

en remarquant que -1 est un pôle.

VIII. Systèmes en boucle fermée

1. Algèbre des diagrammes

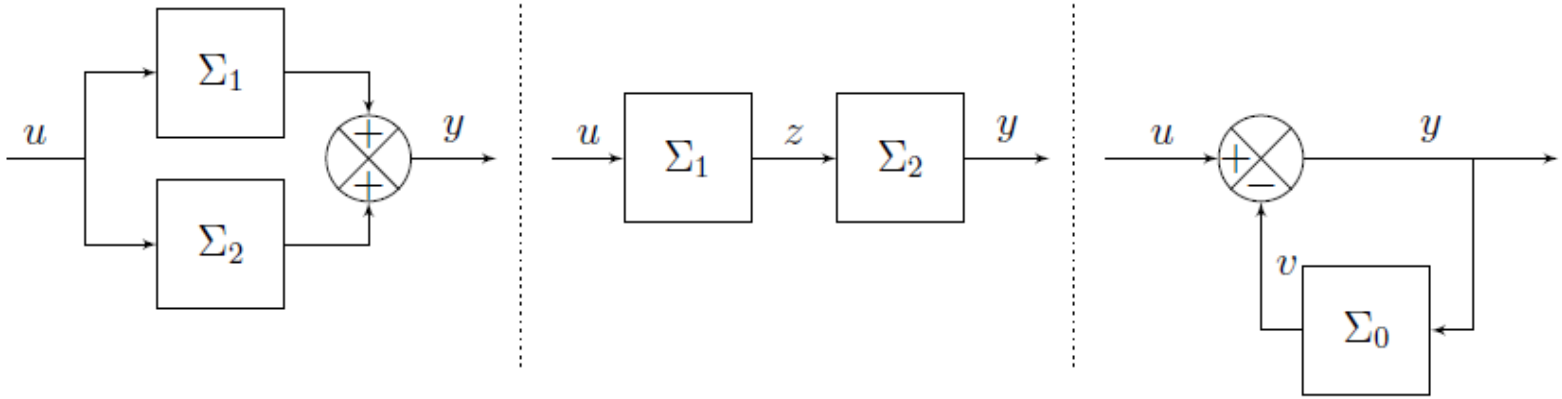


Figure de gauche : systèmes en parallèle

$$\hat{y}(p) = \underbrace{(\Sigma_1(p) + \Sigma_2(p))}_{\Sigma(p)} \hat{u}(p)$$

Figure du milieu: système en série

$$\boxed{\hat{y}(p) = \underbrace{(\Sigma_2(p)\,\Sigma_1(p))}_{\Sigma(p)}\hat{u}(p)}$$

Figure de droite: rétroaction

$$\boxed{\hat{y}(p) = \frac{1}{1+\Sigma_0(p)}\hat{u}(p)}$$

Exemple

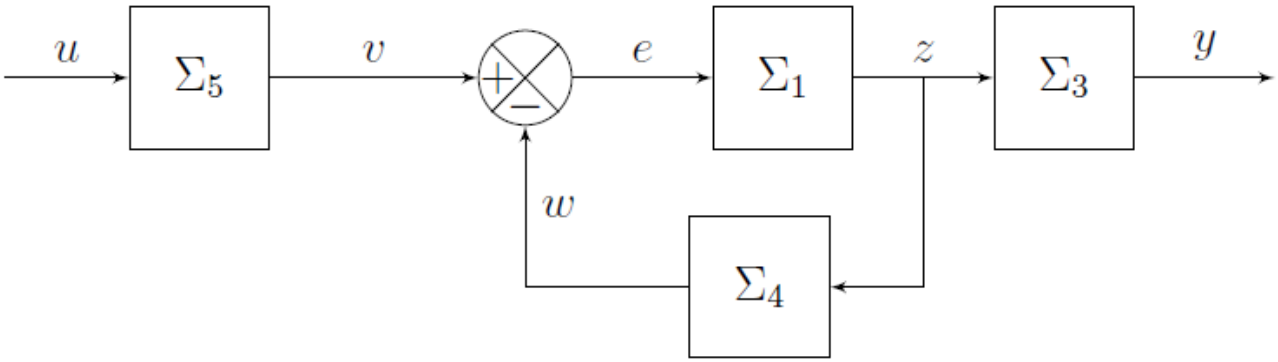


Figure 27: Système bouclé

Σ = mise en série

- de Σ_5,

- du système bouclé élémentaire d'entrée v et de sortie e : fonction de transfert $\frac{1}{1+\Sigma_1\Sigma_4}$,

- de Σ_1

- de Σ_3

$$\boxed{\Rightarrow \Sigma = \Sigma_3 \Sigma_1 \frac{1}{1+\Sigma_1 \Sigma_4} \Sigma_5}$$

2. Stabilité en boucle fermée

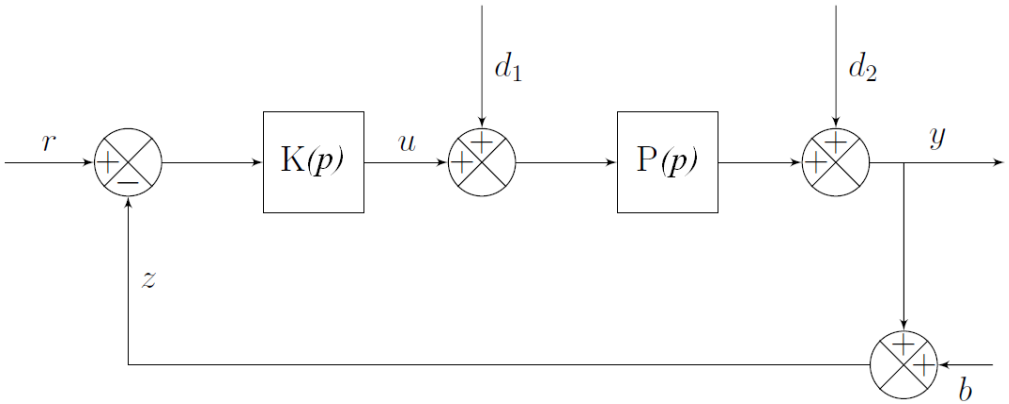


Figure 28: Système bouclé élémentaire

Fonction de transfert de la boucle ouverte :

$$\boxed{L(p) = P(p)\,K(p)}$$

Fonction de transfert de la boucle fermée :

$$\boxed{T(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}}$$

CNS de stabilité en boucle fermée :

$$\boxed{\{\text{pôles de } T(p)\} \subset \mathbb{C}^- \Leftrightarrow \{\text{zéros de } 1 + L(p)\} \subset \mathbb{C}^-}$$

Critère du revers :

On suppose que $L(p)$ n'a pas de pôles dans $\mathbb{C}^+ = \{p : \Re(p) > 0\}$

Le lieu de Nyquist de $L(p)$ est la courbe paramétrée $\omega \mapsto L(i\omega)$ dans le plan complexe.

Théorème 4 Critère du revers: $1 + L(p)$ *a tous ses zéros dans* $\mathbb{C}^-$ *ssi le lieu de Nyquist de* $L(p)$ *ne passe pas par le point critique* -1 *et le laisse à sa droite.*

Cas d'un système du premier ordre

$L(p) = \frac{k}{1+\tau p}, \quad k, \tau > 0.$

La phase varie entre $0°$ et $-90°$.

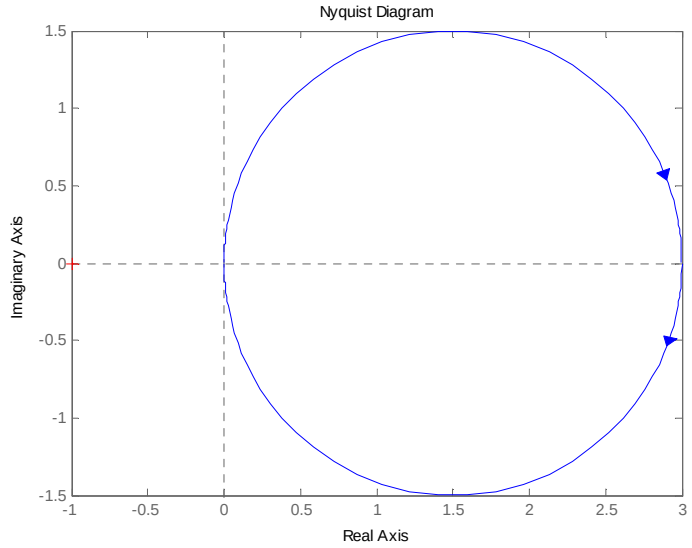


Figure 29: Lieu de Nyquist d'un système du premier ordre

Stabilité $\forall k > 0$.

Cas d'un système du second ordre

$L(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2+2\varsigma\omega_0 p+\omega_0^2}$. La phase varie entre $0°$ et $-180°$.

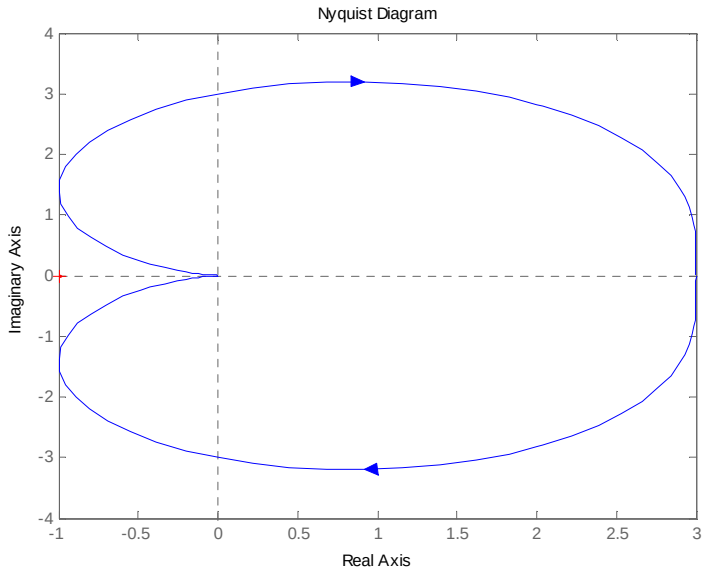


Figure 30: Lieu de Nyquist d'un système du second ordre

Stabilité $\forall k > 0$.

Autres exemples - Exemple 1

$$P(p) = \frac{1000}{(1+10p)(1+p)(1+0.1p)}$$

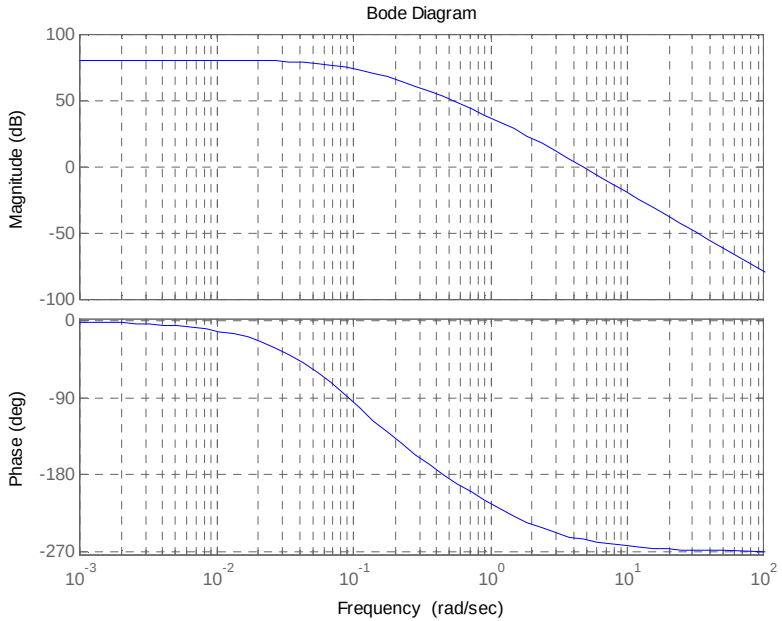


Figure 31: Lieu de Bode

phase=-180° $\Rightarrow$ module $\simeq$ 53dB

Prenons $k_{dB} = -60\text{db} \Rightarrow k = 10^{-60/20} = 10^{-3}$.

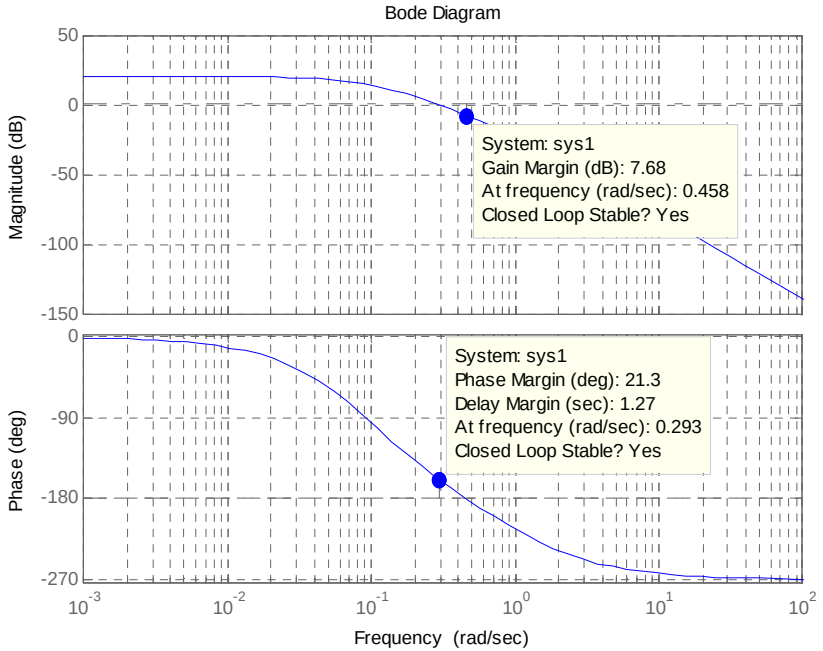


Figure 32: Lieu de Bode du système compensé (k=10^(-3))

Marge de gain: $7,68$dB correcte ($\geq$ 6dB); marge de phase $\phi = 21°$ insuffisante (il faut $\phi \geq 45°$)

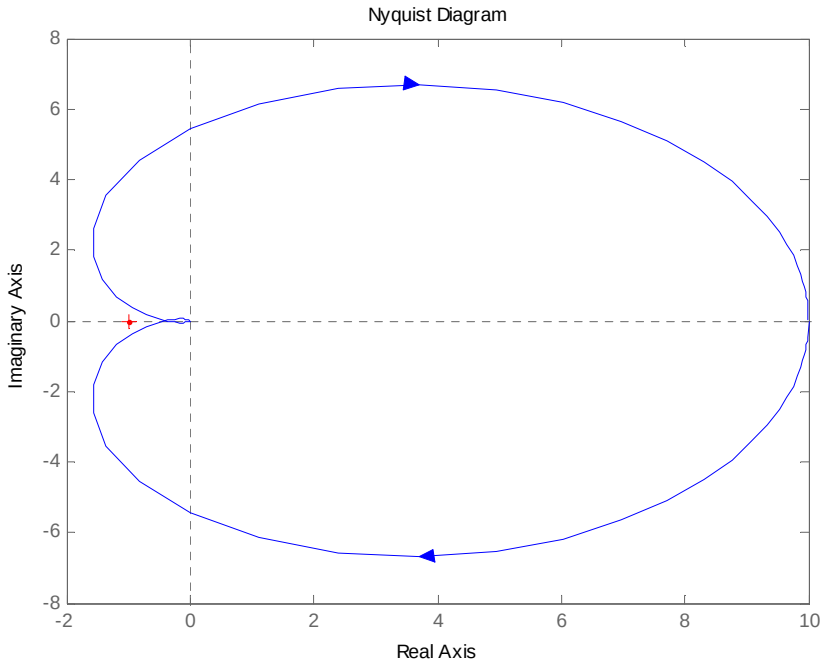


Figure 33: Lieu de Nyquist du système compensé (k=10^(-3)).

Prenons $k = 4.10^{-4}$

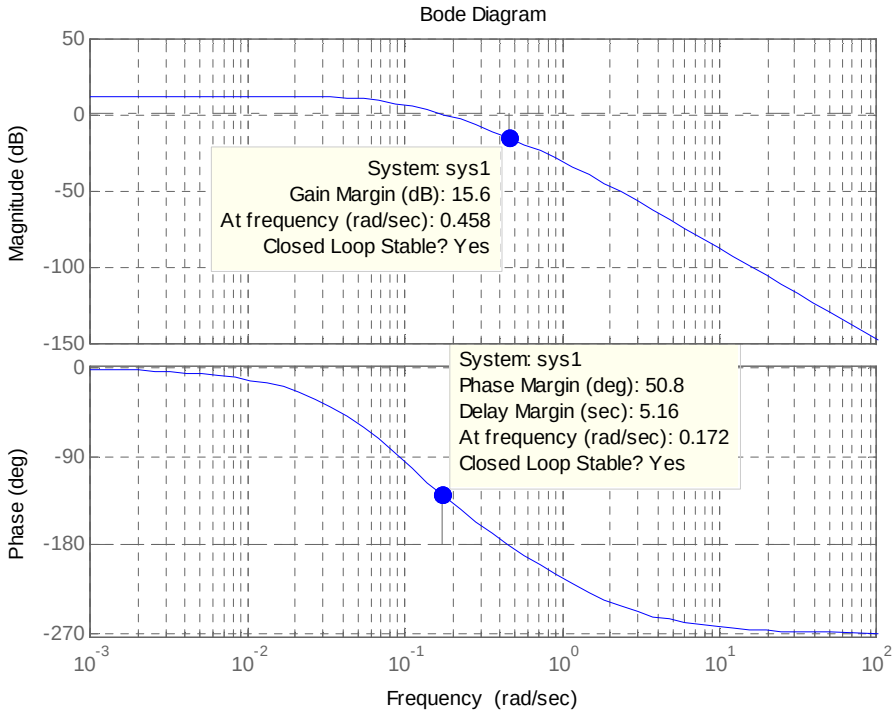


Figure 34: Lieu de Bode du système compensé (k=4.10^(-4))

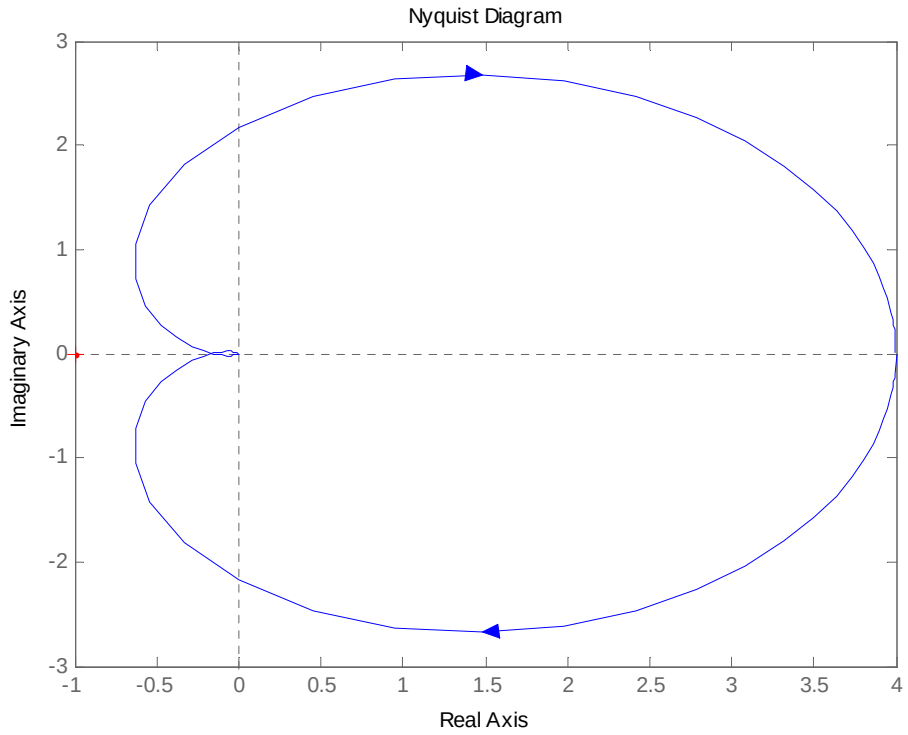


Figure 35: Lieu de Nyquist du système compensé (k=4.10^(-4))

Exemple 2

$$P(p) = \frac{1}{p^3+2{,}5p^2+p}$$

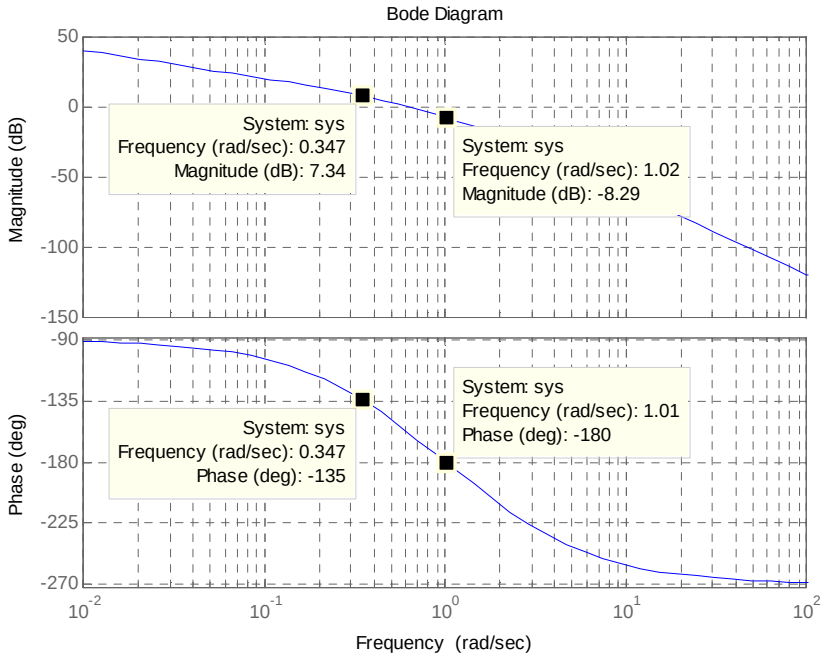


Figure 36: Lieu de Bode - Exemple 2

$k_{dB} \cong -7,34\text{dB} \Rightarrow k \simeq 0,43$

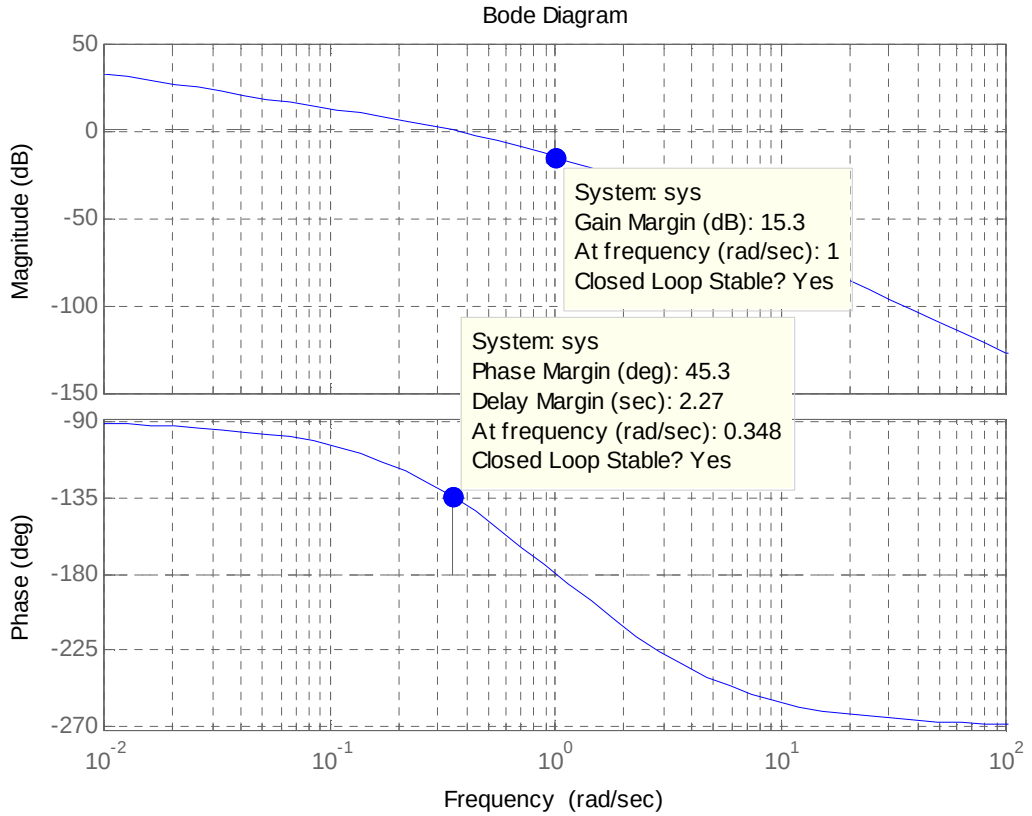


Figure 37: Lieu de bode du système compensé (k=0,43)

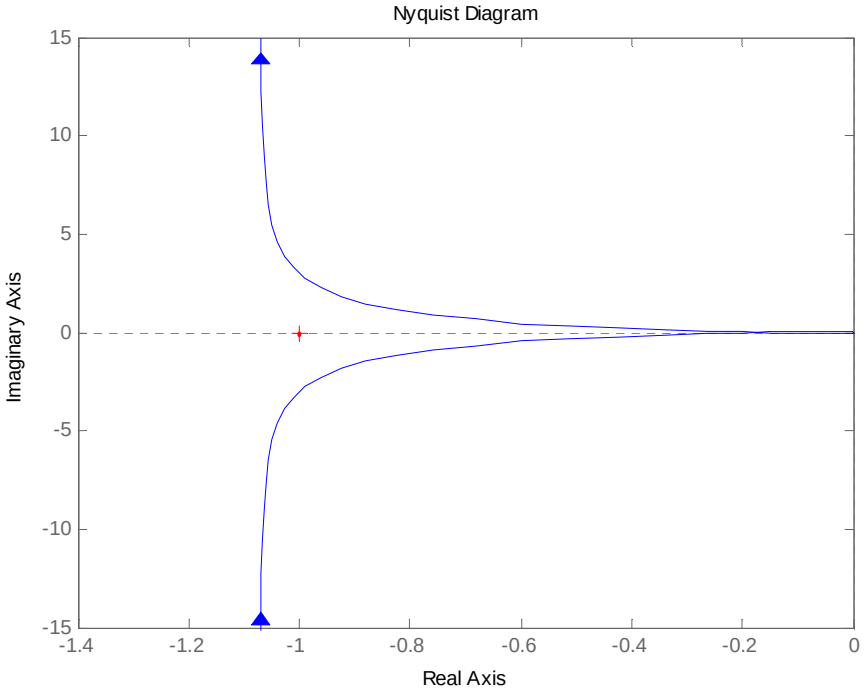


Figure 38: Lieu de Nyquist du système compensé (k=0.43)

Utilisation de l'abaque de Black-Nichols

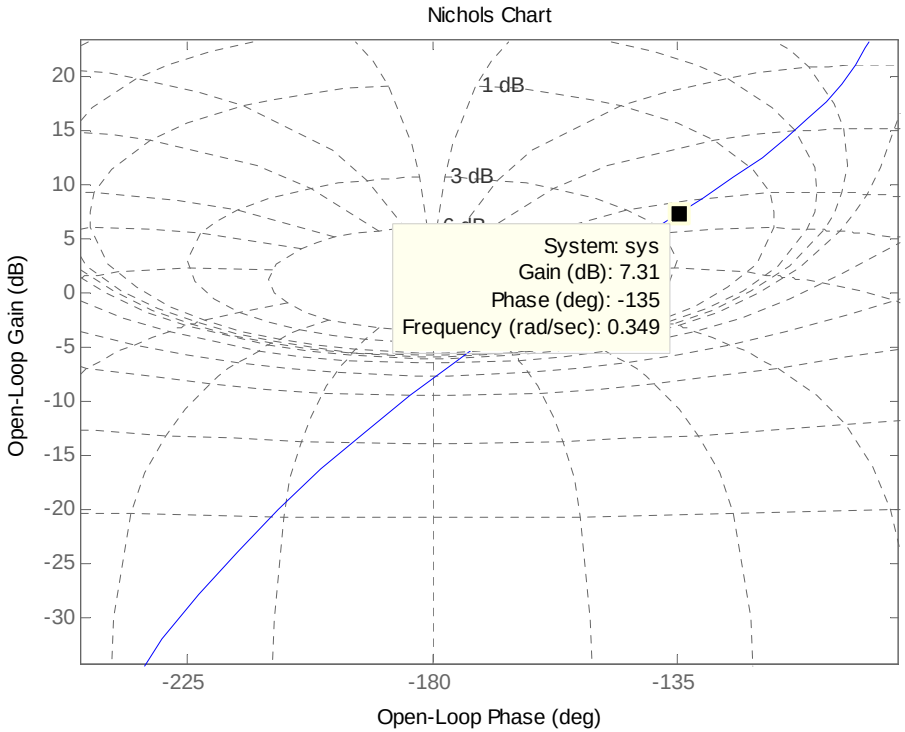


Figure 39: Lieu de Black-Nichols du processus

$\Rightarrow k_{dB} = -7,31\text{dB} \Rightarrow k = 0,4315$

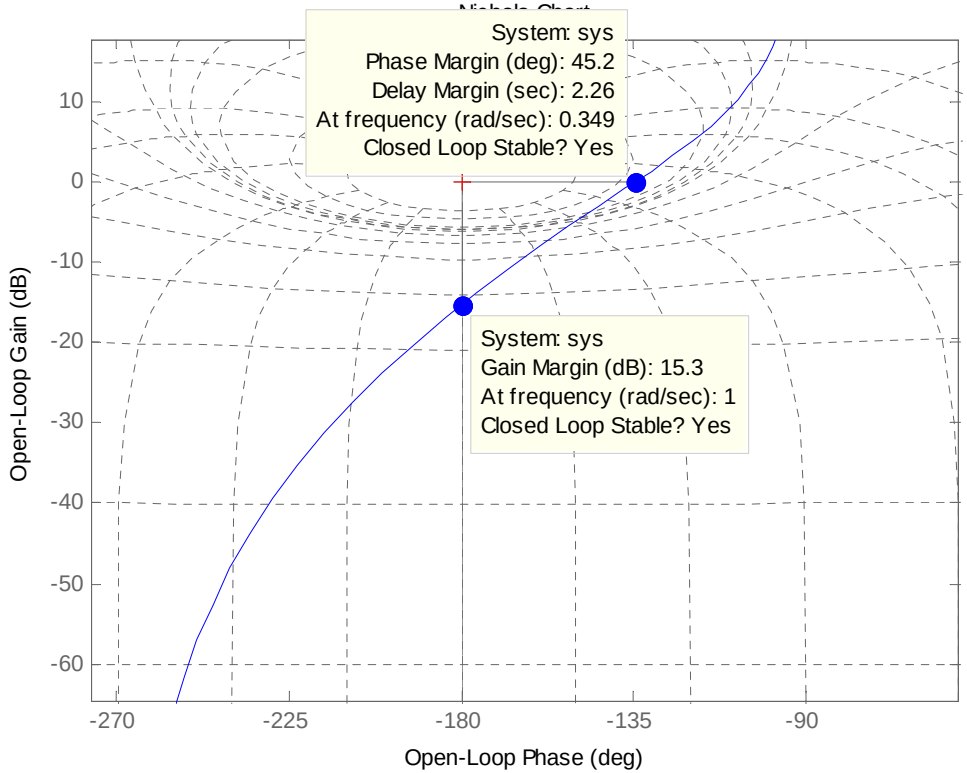


Figure 40: Lieu de Black-Nichols du système compensé (k=0.4315)

IX. Compensation par avance de phase

1. Le problème

Exemple :

$$P(p) = \frac{1 - \frac{p}{3}}{p\left(1 + \frac{p}{2}\right)(1 + 2p)}$$

Lieu de Black-Nichols :

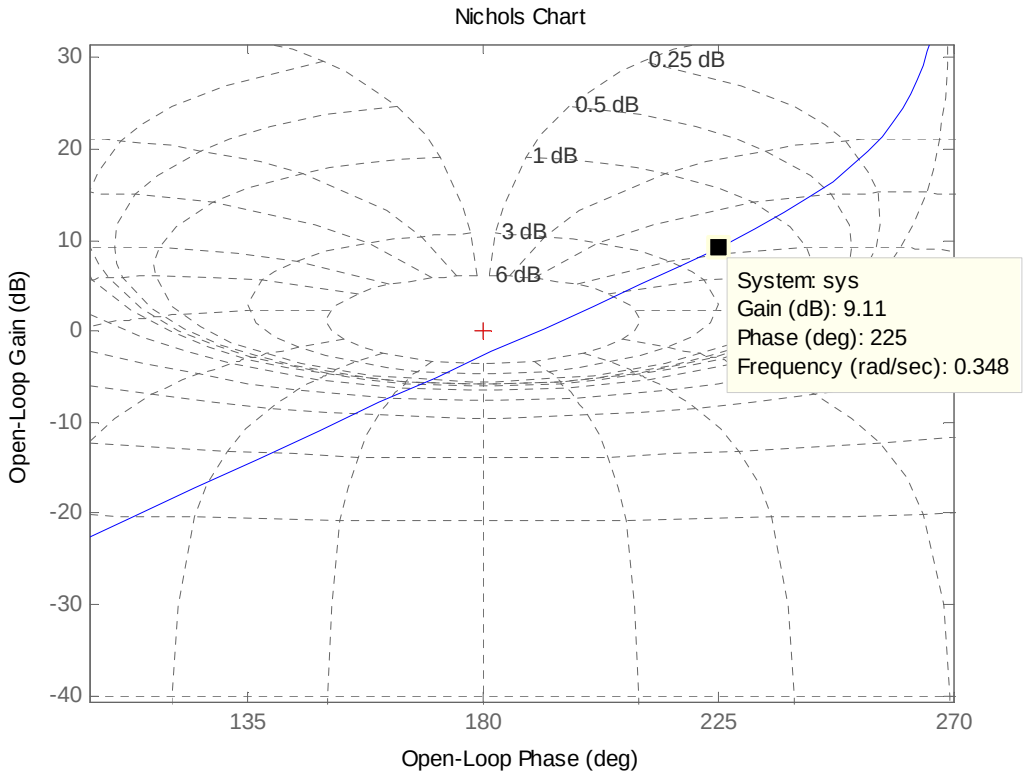


Figure 41: Lieu de Black-Nichols du processus

Marge de phase de $45^\circ \Rightarrow k_{dB} = -9,11 \Rightarrow k = 0,35$

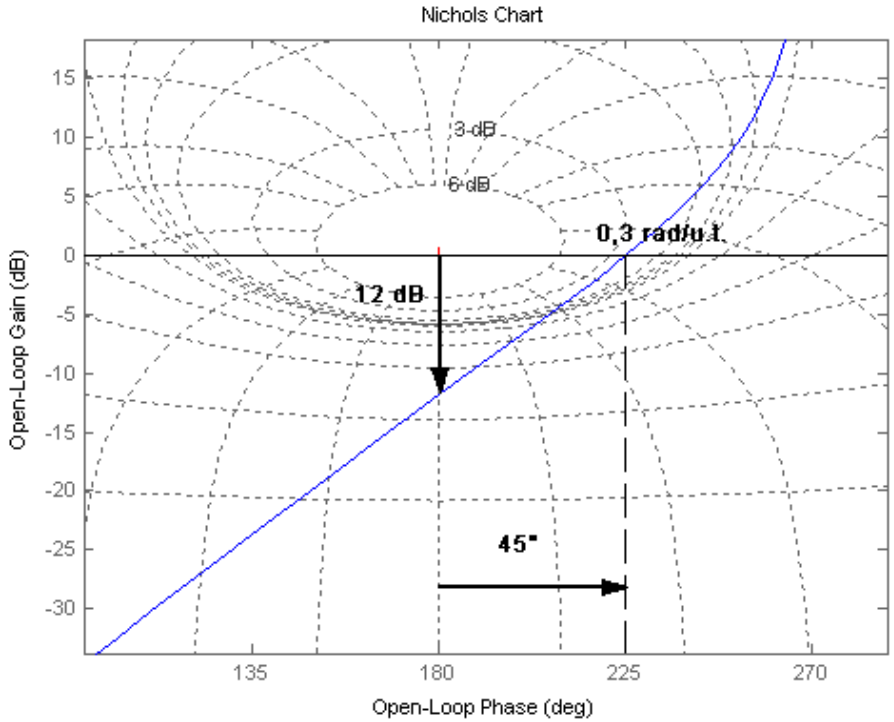


Figure 42: Lieu de Black-Nichols du système compensé (k=0,35)

Pulsation au gain unité : $\omega_0 = 0,3$ rad/s.

Simulation temporelle :

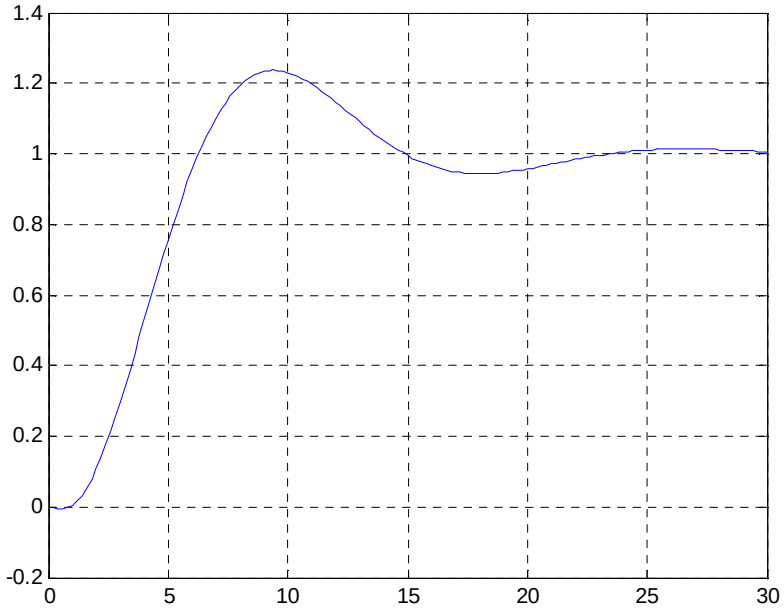


Figure 43: Sortie (k=0,35)

Est-il possible de conserver la même marge de phase tout en accélérant le système bouclé?

2. Solution : avance de phase

Compensateur à avance de phase : $H_0(p) = \frac{1+\alpha\tau p}{1+\tau p}, \quad \tau > 0, \alpha > 1.$
Cas $\tau = 1, \alpha = 5$:

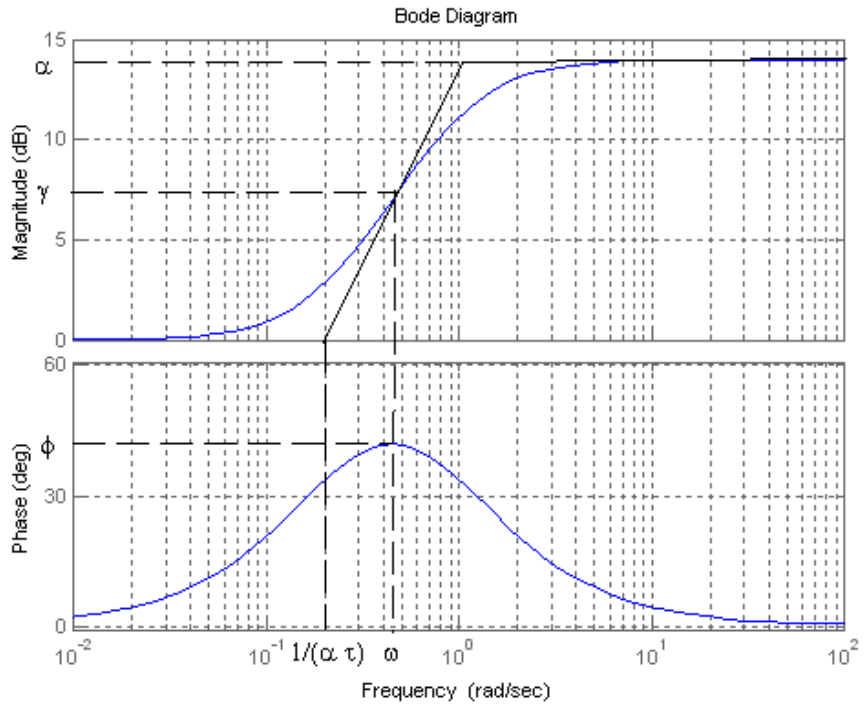


Figure 44: Lieu de Bode d'une cellule à avance de phase

La phase passe par son maximum $\varphi_d = \arcsin \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ pour $\omega_0 = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} =$ moyenne logatithmique de $\frac{1}{\alpha\tau}$ et $\frac{1}{\tau}$.

Alors le gain de $H_0(p)$ est $\sqrt{\alpha} \Rightarrow$ la "cellule à avance de phase"

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1+\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}p}{1+\frac{1}{\omega_0\sqrt{\alpha}}p}}$$

apporte à la pulsation ω_0 une avance de phase

$$\boxed{\varphi_d = \arcsin \frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

un gain de 0dB.

Suite de l'exemple:

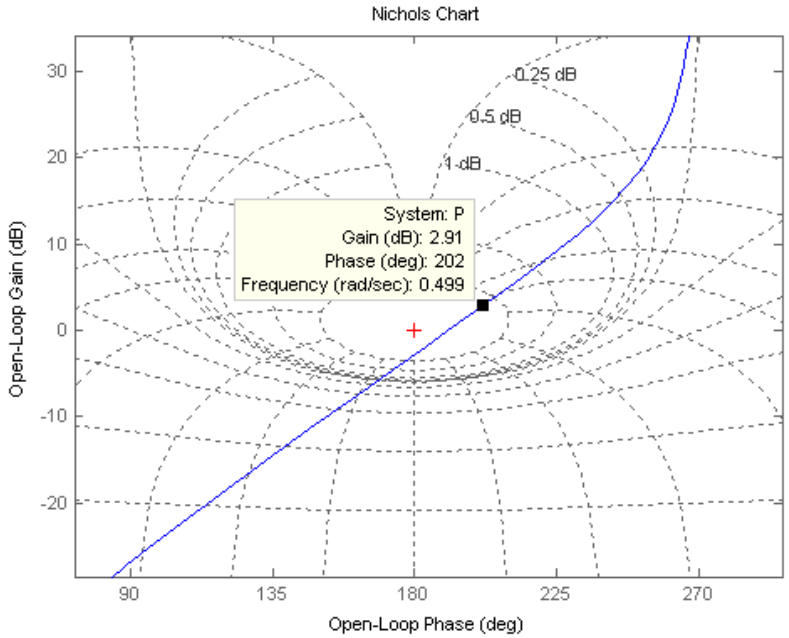


Figure 45: Lieu de Black-Nichols du processus

Marge de phase de 45° pour $\omega_0 = 0,5$ rad/s $\Rightarrow$

- avance de phase $\varphi_d = 225^\circ - 202^\circ = 23^\circ$;

$k_{\text{dB}} = -2,91\text{dB} \Rightarrow k = 0,72$

Compensateur

$$K(p) = 0,72.\underbrace{0,66\frac{1+3p}{1+1,32p}}_{H(p)} = 0,47\frac{1+3p}{1+1,32p}$$

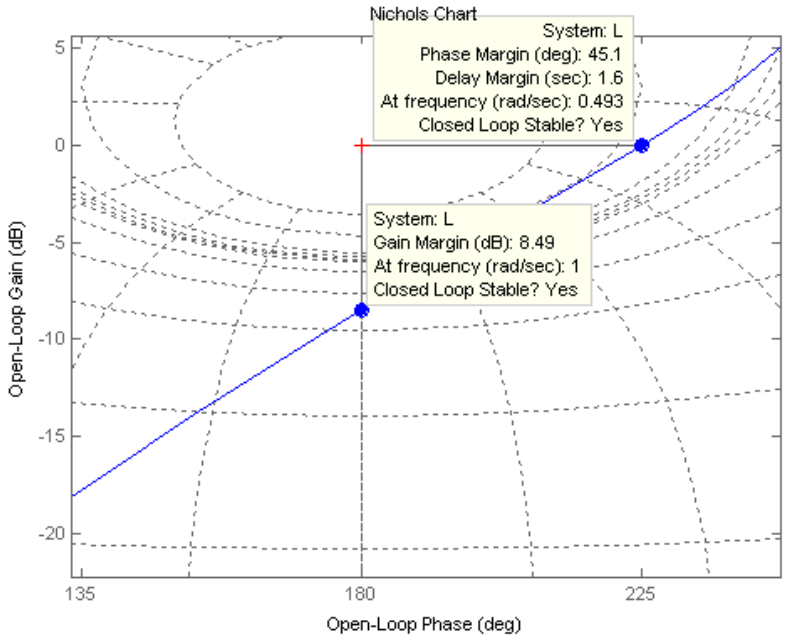


Figure 46: Lieu de Black-Nichols du système compensé

Comparaison des réponses temporelles (compensateur proportionnel et compensateur par avance de phase)

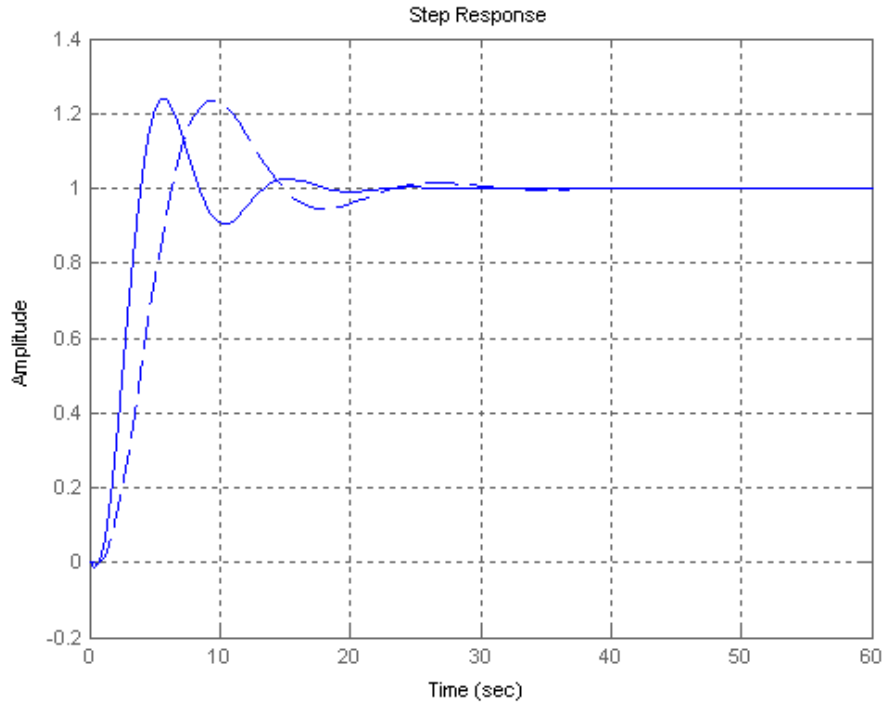


Figure 47: Réponses à l'échelon

Exemple

$P(p) = \frac{5p+10}{p^3+3p^2+4p+2}$. Lieu de Bode :

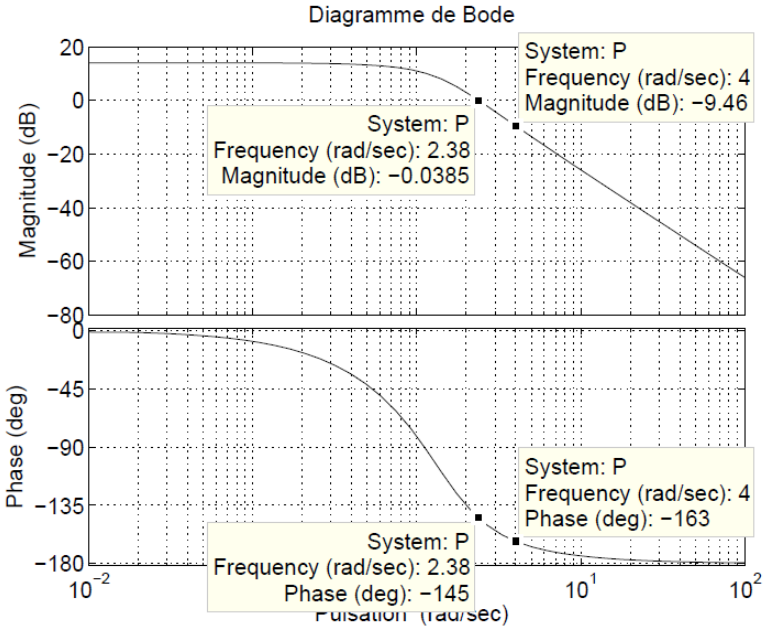


Figure 48: Lieu de Bode du processus

Calculer le compensateur pour lequel la marge de phase est de 60° à $\omega_0 = 4$ rad/s.

Solution :

$\varphi_d = -180° + 60° - (-163°) = 43°.$

$\alpha = \frac{1+\sin(\varphi_d)}{1-\sin(\varphi_d)} = 5,24$

$\sqrt{\alpha}/\omega_0 = 2,29/4 = 0,57$

$1/\left(\omega_0\sqrt{\alpha}\right) = 1/\left(4.2,29\right) = 0,11$

$H\left(p\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1+\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}p}{1+\frac{1}{\omega_0\sqrt{\alpha}}p} = 0,44.\frac{1+0,57p}{1+0,11p}$

gain $k_{\text{dB}} = 9,46\text{dB} \Rightarrow k = 2,95$

$\Rightarrow K\left(p\right) = 2,95.0,44.\frac{1+0,57p}{1+0,11p} = 1,30\frac{1+0,57p}{1+0,11p}$

Lieu de Bode du processus (P), du compensateur (C) et de la boucle ouverte (L)

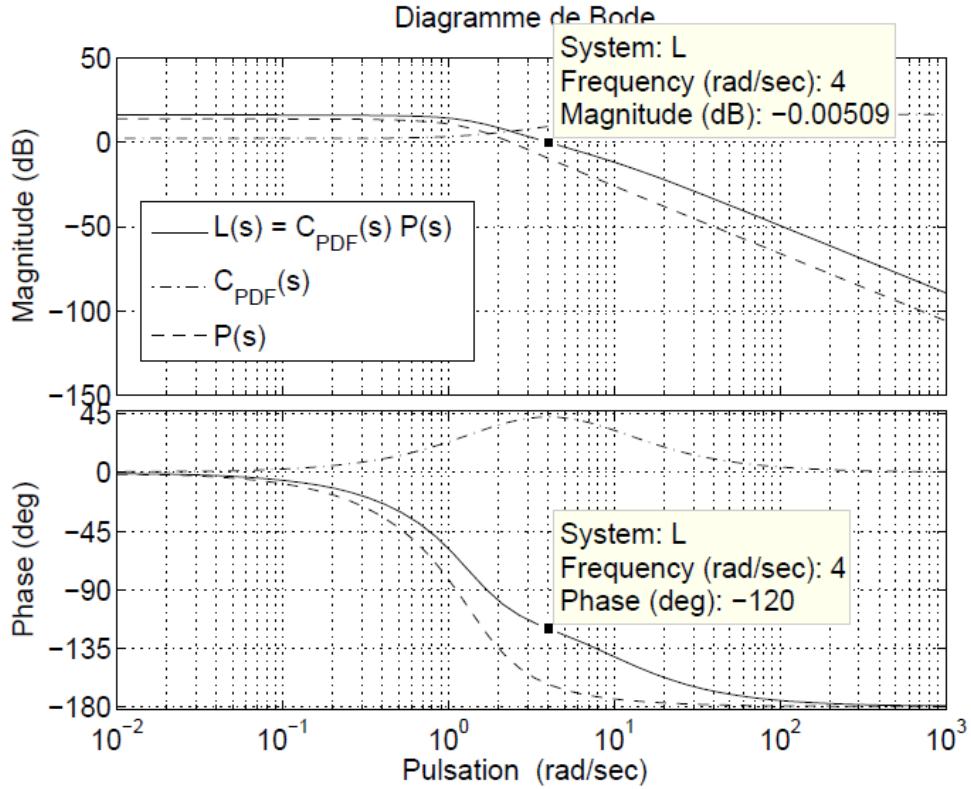


Figure 49: Lieux de Bode

Simulation temporelle du système assservi

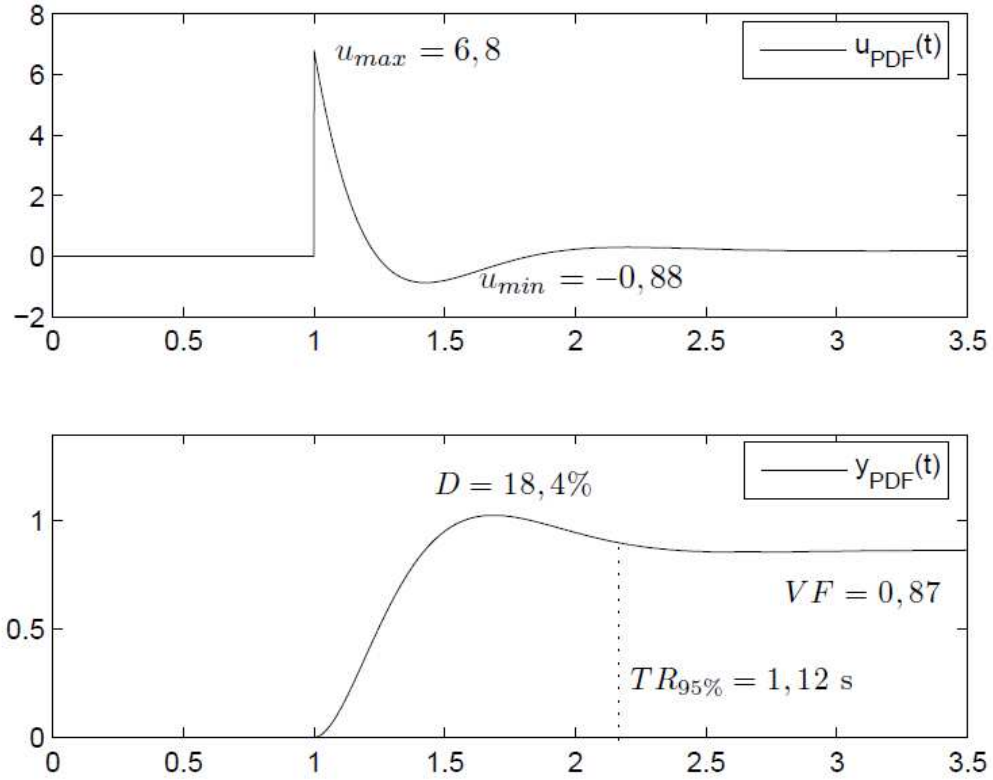


Figure 50: Simulation temporelle

3. Régulateur proportionnel et dérivé

$$K_{PD}(p) = k\left(1 + T_d p \quad \underbrace{\frac{1}{1+\frac{T_d}{N}p}}_{\text{Filtrage de la dérivée}}\right).$$

$K_{PD}(p) = \lambda\frac{1+\alpha\tau p}{1+\tau p}$ avec

$$\lambda = k, \quad \tau = \frac{T_d}{N}, \quad \alpha = N+1$$

$=$ compensateur par avance de phase $+$ gain.

X. Régulateur proportionnel et intégral

1. Nécessité d'une action intégrale

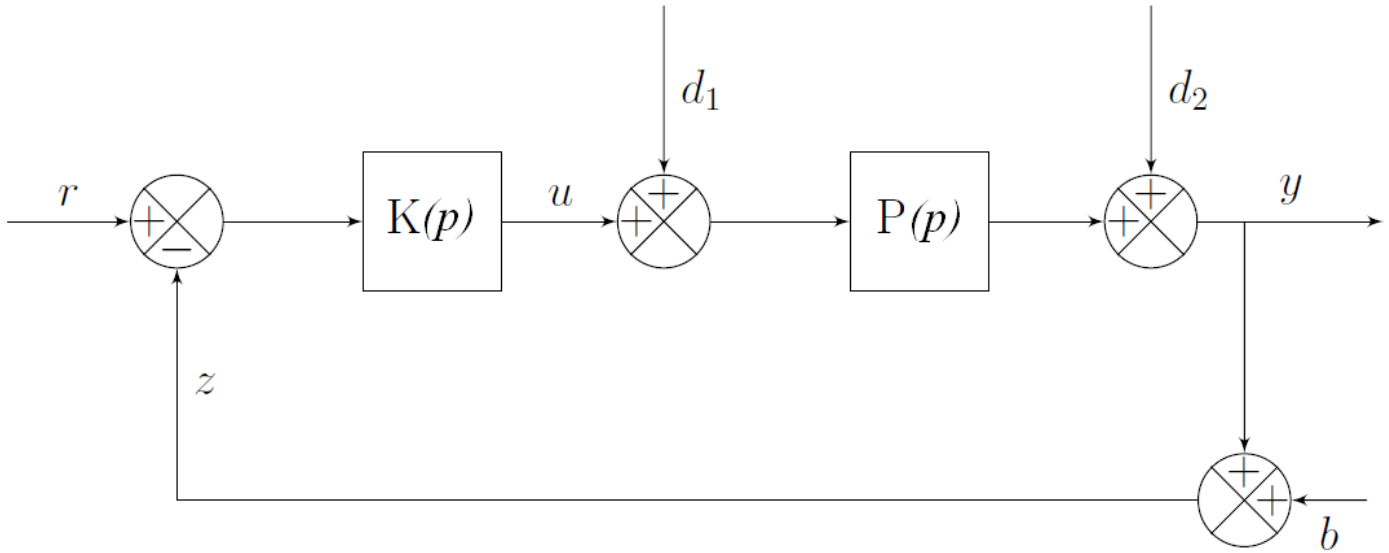


Figure 51: Système bouclé standard

$$\hat{y}(p) = \frac{P(p)K(p)}{1+P(p)K(p)}\hat{r}(p) + \frac{1}{1+P(p)K(p)}\hat{d}_2(p) + \frac{P(p)}{1+P(p)K(p)}\hat{d}_1(p)$$

$$\hat{e}(p) = \hat{y}(r) - \hat{r}(p) = \underbrace{\frac{1}{1 + P(p) K(p)}}_{S(p)= \text{ fonction de sensibilité}} \left(\hat{d}_2(p) - \hat{r}(p)\right)$$
$$+ \underbrace{\frac{P(p)}{1 + P(p) K(p)}}_{P(p)S(p)} \hat{d}_1(p).$$

Absence d'erreur statique pour $r = C^{te}$+ rejet de la perturbation d_2 :

$$S(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \to 0} |P(p) K(p)| = \infty.$$

+ Rejet de la perturbation d_1 : $P(p) S(p) \sim \frac{P(p)}{P(p)K(p)} = \frac{1}{K(p)} \Rightarrow$

$$\lim_{p \to 0} |K(p)| = \infty$$

= régulateur à action intégrale .

2. Fonction de transfert d'un régulateur PI

$$\boxed{K_{PI}(p) = k\left(1 + \frac{1}{T_I p}\right)}$$

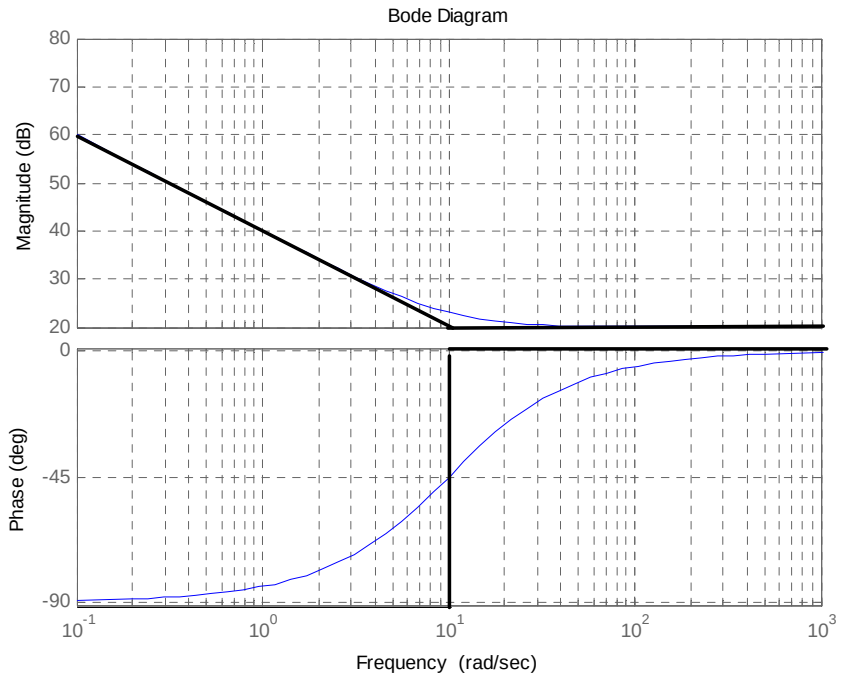


Figure 52: PI : T_i=0,1, k=10

$$\arg\left(K_{PI}\left(i\omega\right)\right) = \arg\left(1 + iT_I\omega\right) - \pi/2 = \arctan\left(T_I\omega\right) - \pi/2.$$

Ce régulateur apporte un retard de phase

$$\varphi_I = \pi/2 - \arctan\left(T_I\omega\right) \in]0, 90^\circ[$$

Méthode : Deux étapes :

1) Déterminer le régulateur qui retarde la phase de φ_I à la pulsation ω_0 sans modifier le module

2) Rajouter la compensation proportionnelle nécessaire

Etape 1):

$$K_{rp}(p) = \gamma\left(1 + \frac{1}{T_I p}\right), T_I = \frac{1}{\omega_0 \tan\varphi_I}, \gamma = \frac{T_I\omega_0}{\sqrt{1+(T_I\omega_0)^2}} = \cos(\varphi_I)$$

3. Exemple

$$P(p) = 2\frac{1 - 0,1p}{(1 + 0,5p)(1 + p)}$$

Objectif: marge de phase de 60°.

1) Commande proportionnelle

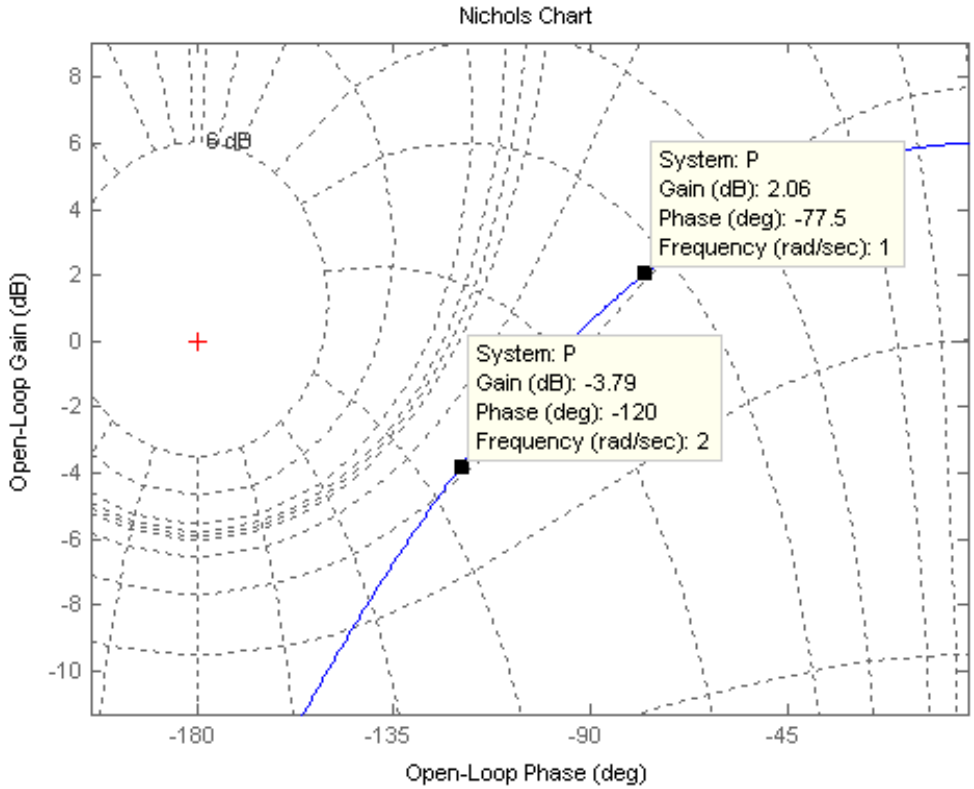


Figure 53: Lieu de Black-Nichols de P(p)

$\Rightarrow$ Gain de $3,79$dB, $\omega_P = 2$rad/s.

2) Commande PI

Choisir un point du lieu de Black-Nichols ayant une phase $> -120^\circ \Rightarrow$ $\omega_0 < \omega_P$.

Possibilité $\omega_{PI} = 1\text{rad/s} \Rightarrow \text{phase} = -77,5^\circ$.

Retard de phase : $120^\circ - 77,5^\circ = 42,5^\circ$.

$$T_I = \frac{1}{\omega_0 \tan(42{,}5 \times \pi/180)} = 1,09\text{s}$$

$$\gamma = \cos(42,5 \times \pi/180) = 0,74.$$

Mettre en série un gain de $-2,06\text{dB} \sim 0,79$.

Régulateur PI : $K(p) = \underbrace{0,79 \times 0,74}_{k=0{,}58}\left(1 + \frac{1}{1{,}09p}\right)$

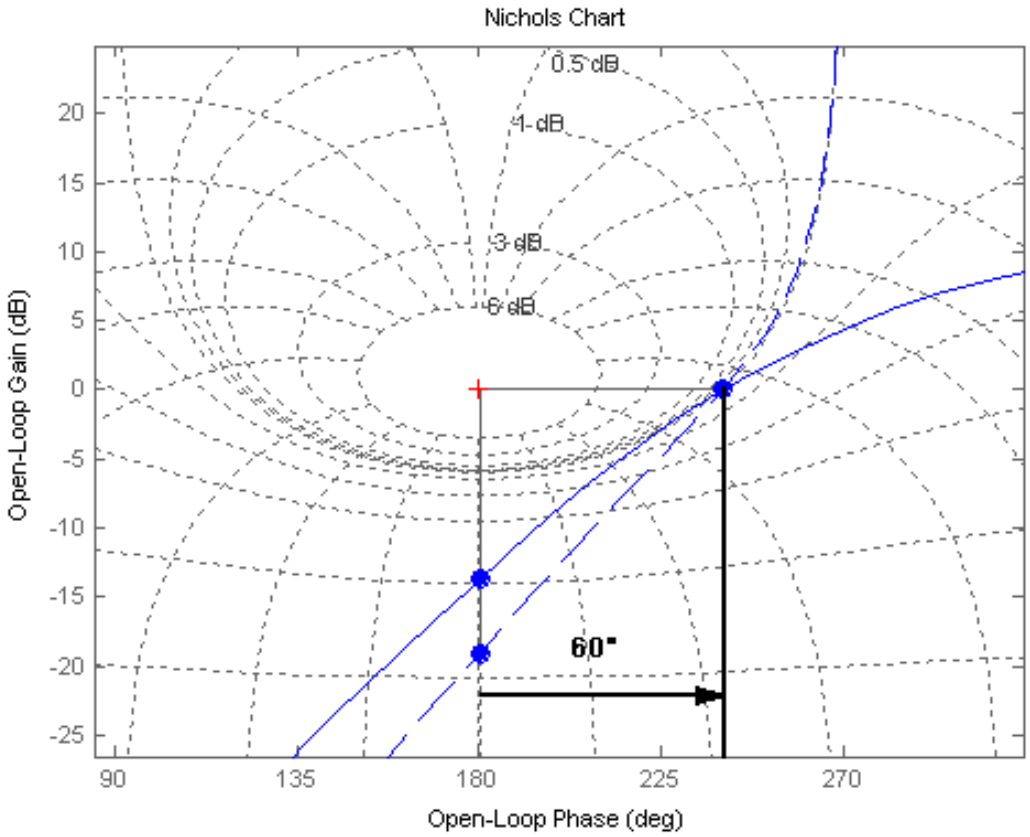


Figure 54: Lieu de Black-Nichols des systèmes compensés: P('-'), PI('- -')

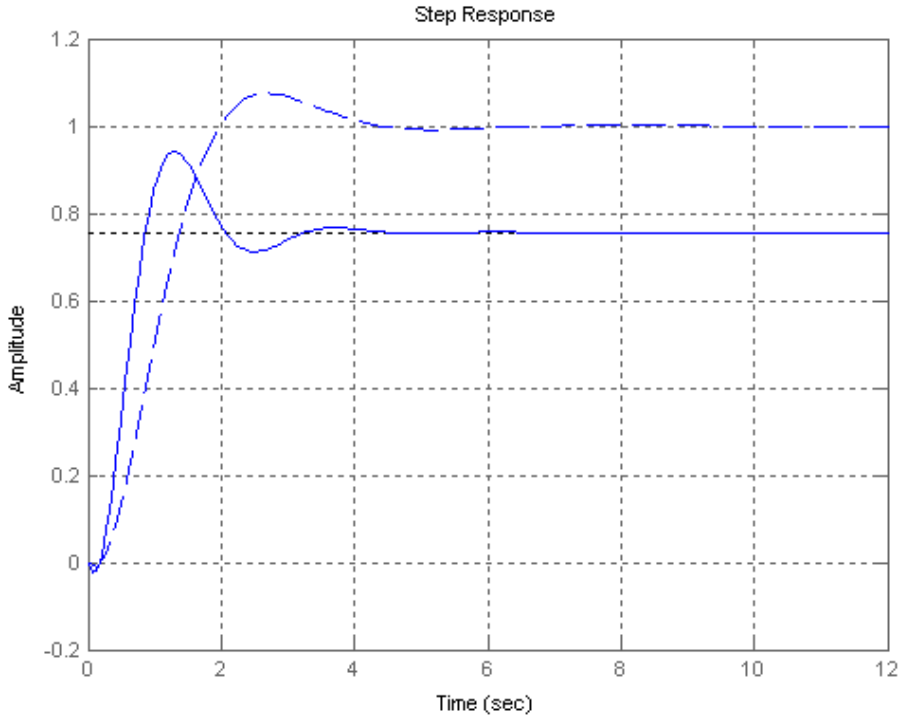


Figure 55: Réponses à l'échelon : commandes P ('-') et PI ('- -')

4. Exercice 1

$K(p) = \frac{5p+10}{p^3+3p^2+4p+2}$. Objectif: régulateur PI, marge de phase de MP=60°.

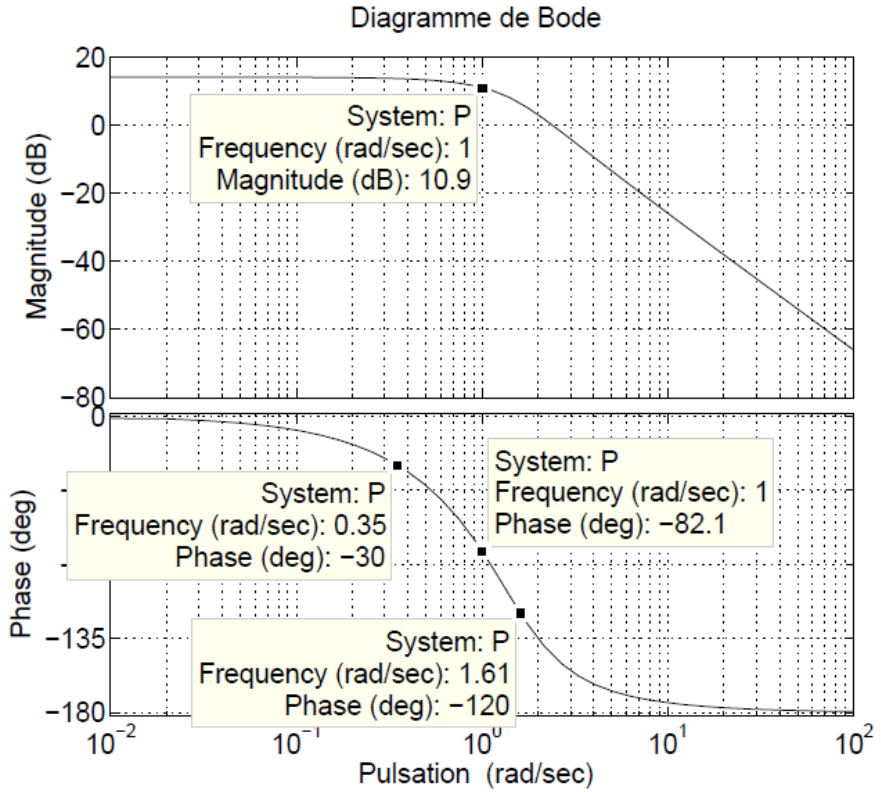


Figure 56: Lieu de Bode du système

Solution

Prenons $\omega_0 = 1$ rad/s.

$\varphi_I = \arg P(i\omega_0) + 180° - \text{MP} = 37,9°.$

$T_I = \frac{1}{\omega_0 \tan(37{,}9 \times \pi/180)} = 1,28\text{s}$

$\gamma = \cos(\varphi_I) = 0,79$

en série: gain de $10^{-10,9/20} = 0,28$

$$K(p) = \underbrace{0,28 \times 0,79}_{k=0,23}\left(1 + \frac{1}{1,28p}\right)$$

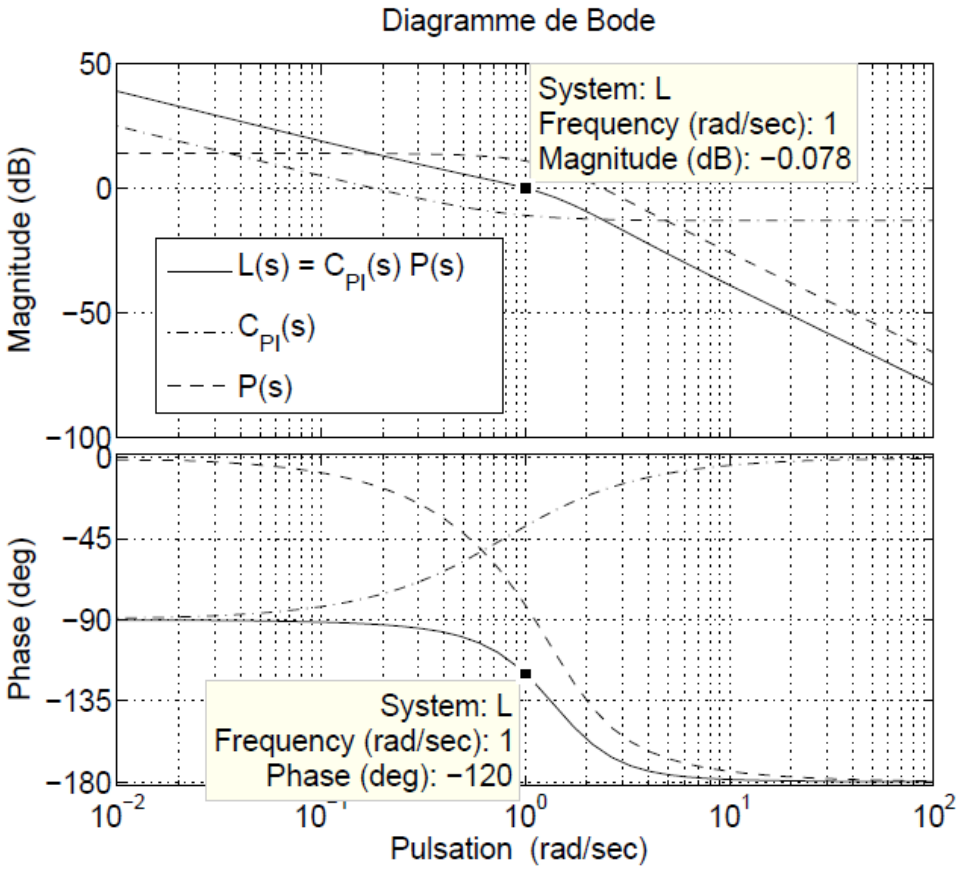


Figure 57: Diagrammes de Bode

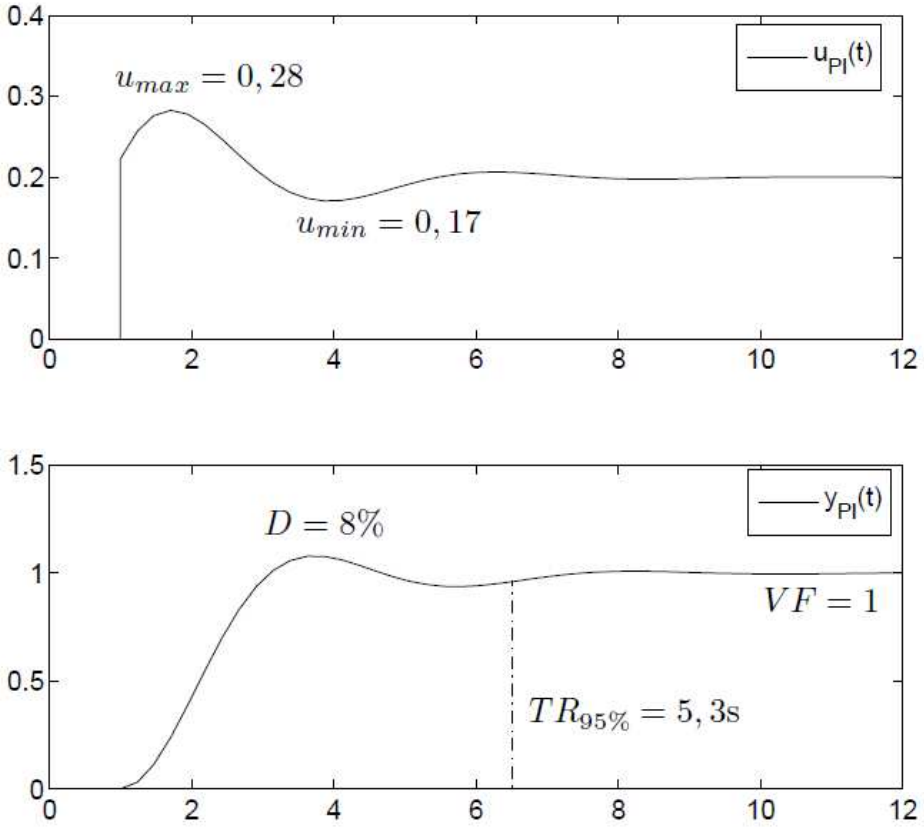


Figure 58: Simulation temporelle: réponse à l'échelon du système bouclé

5. Exercice 2

Même système, l'objectif étant une marge de phase de 45°

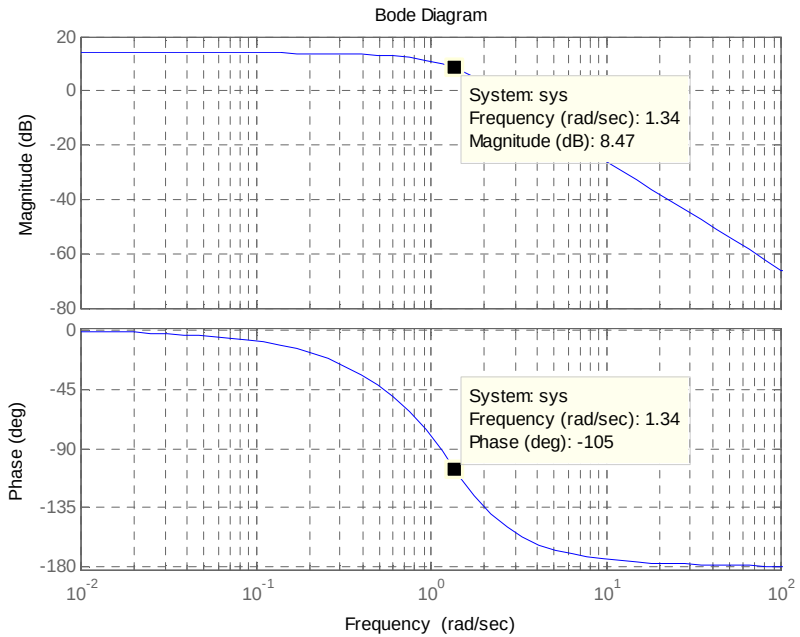


Figure 59: Lieu de Bode de l'exercice 2

Réponse : $k = 0,3936, \quad T_I = 0.6570$s

XI. Régulateur proportionnel, intégral et dérivé (PID)

1. "Philosophie"

- Le terme intégral du PI élimine l'erreur statique mais ralentit le système bouclé.

- Le terme dérivé du PD accélère le système bouclé.

$\longrightarrow$ combiner les deux effets : régulateur PID

A une pulsation ω_0 choisie on voudra une marge de phase MP

$\longrightarrow$ faire une avance de phase $\varphi_d \in]0, 90°[$ à cette pulsation ω_0 sans changer le module (cellule à avance de phase)

$\longrightarrow$ faire un retard de phase $\varphi_I \in]0, 90°[$ à cette pulsation ω_0 sans changer le module (PI), avec

$$\boxed{\arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) + \varphi_d - \varphi_I = -180 + MP} \qquad (2)$$

$\longrightarrow$ Mettre en série un gain de $-\left|P\left(i\omega_0\right)\right|_{\text{dB}} = -20\log_{10}\left(\left|P\left(i\omega_0\right)\right|\right)$

Remarque 1

$$\begin{aligned} \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) + \varphi_d - \varphi_I &= -180 + MP \Leftrightarrow \\ \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) &= MP - 180 + \underbrace{\left(\varphi_I - \varphi_d\right)}_{\in]-90^\circ, +90^\circ[} \end{aligned}$$

réalisable si, et seulement si

$$\boxed{MP - 270^\circ < \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) < MP - 90^\circ} \tag{3}$$

Cas d'une commande PI : $\varphi_d = 0 \longrightarrow$ réalisable si, et seulement si

$$\boxed{MP - 180^\circ < \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) < MP - 90^\circ} \tag{4}$$

(condition plus contraignante).

Remarque 2

On a une condition sur $\varphi_d - \varphi_I \Rightarrow$ on peut choisir arbitrairement $\varphi_d + \varphi_I$

Choix "raisonnable" :

$$\boxed{\varphi_d + \varphi_I = 90^\circ}$$

2. Exemple

$P(p) = 2\frac{1-0{,}1p}{(1+0.5p)(1+p)}$

On a déjà conçu pour cet exemple :

- Une commande proportionnelle pour laquelle la marge de phase est de 60° à $\omega_0 = 2$ rad/s (p. 132).

- Une commande PI pour laquelle la marge de phase est de 60° à $\omega_0 = 1$ rad/s (p. 133).

- Simulations temporelles : p. 135.

- On souhaite maintenant concevoir une commande pour laquelle la marge de phase soit de 60° à $\omega_0 = 2$ rad/s sans erreur statique.

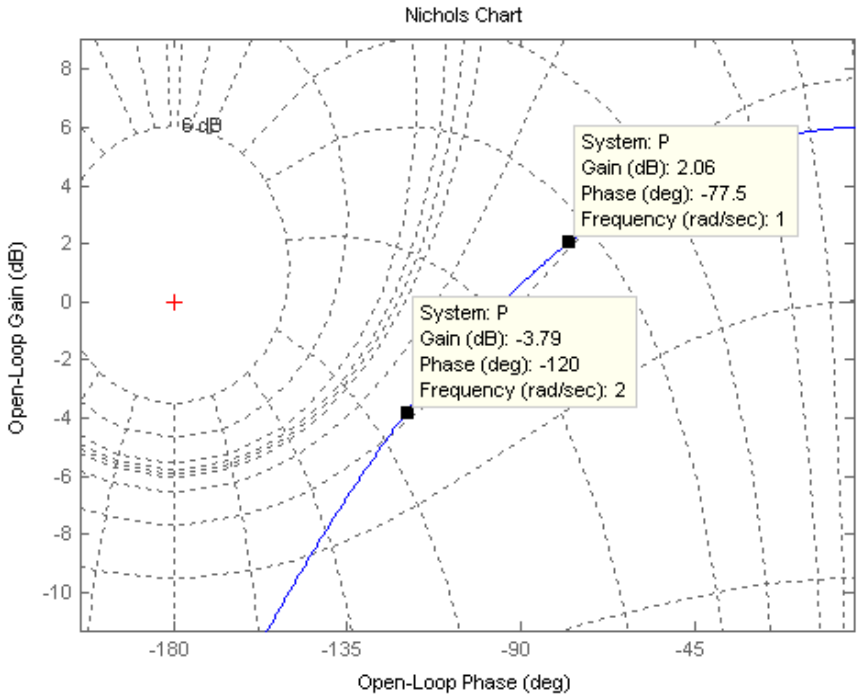


Figure 60: Lieu de Black-Nichols de P(p)

$\arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) = -120^\circ \Rightarrow$ condition (4) non satisfaite, condition (3) satisfaite.

$\Rightarrow$ régulateur PID nécesaire.

$(2) \Leftrightarrow \varphi_d - \varphi_I = -180 - \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) + MP.$

En prenant $\varphi_d + \varphi_I = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \varphi_d &= \frac{1}{2}\left(-90^\circ - \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) + MP\right) \\ \varphi_I &= \frac{1}{2}\left(270^\circ + \arg\left(P\left(i\omega_0\right)\right) - MP\right) \end{aligned}$$

Ici, $\varphi_d = \varphi_I = 45^\circ$.

Etape 1: calcul du compensateur à avance de phase

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_d}{1-\sin\varphi_d} = \frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2} = 2\left(1+\sqrt{2}/2\right)^2 = 5,83$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha} = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}/2\right) = 1+\sqrt{2} = 2,414$$

$$\Rightarrow 1/\sqrt{\alpha} = 1/\left(1+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1 = 0,414.$$

$$H(p) = 0,414\frac{1+(2{,}414/2)p}{1+(0{,}414/2)p} = 0,414\frac{1+1{,}21p}{1+0{,}21p}$$

Etape 2: calcul du PI

$$T_I = \frac{1}{\omega_0 \tan(\varphi_I)} = \frac{1}{2\tan(\pi/4)} = 0,5.$$

$$\gamma = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 = 0,707$$

$$K_{PI}(p) = 0,707\left(1 + \frac{1}{0,5p}\right) = 0,707\left(1 + \frac{2}{p}\right).$$

Etape 3: Gain de 3,79 dB

$$10^{3,79/20} = 1,55$$

Etape 4: expression du régulateur

$$K_{PID}(p) = \underbrace{0,414 \times 0,707 \times 1,55}_{0,453}\frac{1+1,21p}{1+0,21p}\left(1 + \frac{2}{p}\right)$$

3. Mise sous forme "PID standard"

$=$ forme

$$\boxed{K_{PID}(p) = k\left(1 + \frac{1}{T_I p} + \frac{T_d p}{1+\frac{T_d}{N}p}\right)}$$

$$K_{PID}(p) = \frac{k(1+N)p^2 + k\left(\frac{N}{T_d}+\frac{1}{T_I}\right)p + \frac{kN}{T_I T_d}}{p^2+\frac{N}{T_d}p} = \kappa\frac{1+\alpha\tau_1 p}{1+\tau_1 p}\left(1+\frac{1}{\tau_2 p}\right)$$

avec en posant $\delta = 1 + (\alpha - 1)\frac{\tau_1}{\tau_2}$:

$$N = \frac{\alpha}{\delta} - 1, \quad T_d = N\tau_1, \quad k = \kappa\delta, \quad T_I = \delta\tau_2.$$

Ici: $\delta = 3,02, \quad N = 0,92, \quad T_d = 0,19, \quad k = 1,37, \quad T_I = 1,50.$

Comparaison des réponses temporelles :

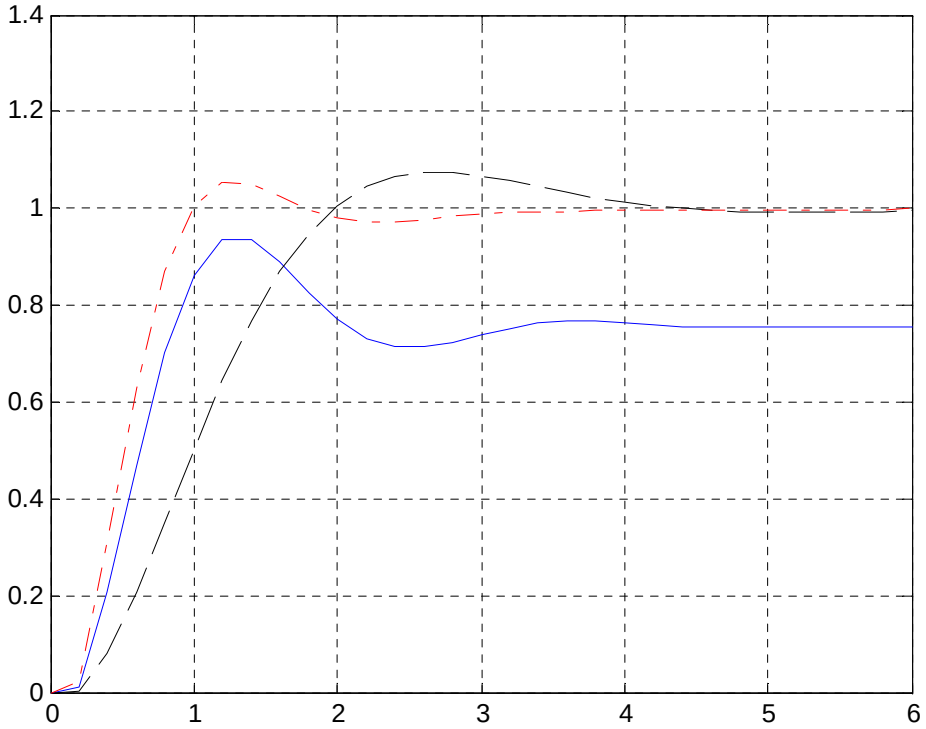


Figure 61: Réponses à l'échelon du système bouclé: P ('-'), PI ('- -'), PID ('- .')

Exercice

$P(p) = \frac{5p+10}{p^3+3p^2+4p+2}$. Objectif: absence d'erreur statique, marge de phase de 60° à 4 rad/s.

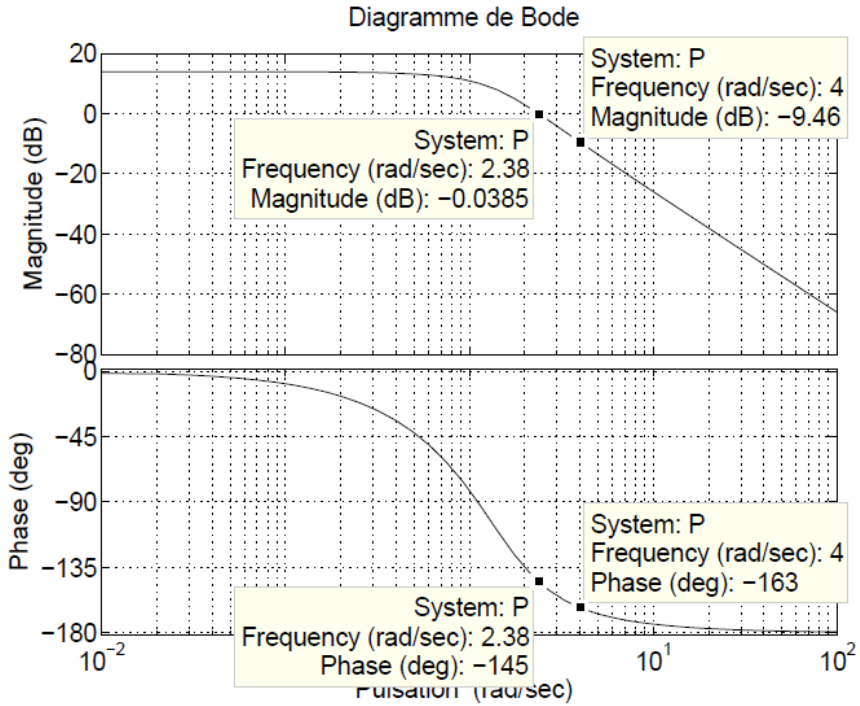


Figure 62: Lieu de Bode du système non corrigé