

Automatique

1. *Modélisation*
2. *Théorie des systèmes*
3. *Asservissements*
4. *Identification*

L'automatique est la science des systèmes. Ce dernier terme doit être entendu ici non pas comme une totalité close sur elle-même, mais au contraire comme un ensemble d'éléments (dits « sous-systèmes ») en interaction, ensemble qui est lui-même en interaction avec un environnement constitué d'autres systèmes. Cette science a une composante théorique constituée des outils de compréhension de la structure des systèmes et de leur comportement, et une composante pratique car l'automatique a pour fin de faire fonctionner des systèmes en minimisant l'intervention de l'homme pour le libérer de toutes sortes de tâches fastidieuses, répétitives ou dangereuses. L'automaticien s'intéresse donc essentiellement aux systèmes construits *pour* l'homme : une chaîne de fabrication dans une usine ; un alternateur dans une centrale de production d'électricité ou le « système électrique » dans son ensemble (formé des centres de production, des lignes de transport d'énergie et des centres de consommation) ; un avion ou un navire (dont la conduite est facilitée par les « pilotes automatiques »). L'automatique permet de concevoir le mieux possible la « commande » (c'est-à-dire l'action) à exercer sur ces systèmes.

Une distinction fondamentale est celle qui existe entre « commande en boucle ouverte » et « commande en boucle fermée ». Commander un système en boucle ouverte, c'est le faire en aveugle, sans tenir compte des résultats de son action. Lorsqu'on connaît parfaitement un chemin, on dit parfois qu'on pourrait le faire « les yeux fermés ». Et il est vrai que si, tel le génie de Laplace, on avait une connaissance parfaite du monde, on pourrait commander en boucle ouverte tous les systèmes qui en font partie. Mais la connaissance que l'on a des choses est imparfaite ; à chaque coin de rue et même à chaque pas, des aléas peuvent se produire qui rendent nécessaire de constater à tout moment ce qui advient, et (grâce à un repère visuel ou à un plan) de corriger l'action entreprise à partir de la réalité qui s'actualise instant après instant. De même, il ne suffit pas à un pilote d'afficher le cap une fois pour toutes pour conduire l'avion ou le navire à destination : en fonction d'aléas tels que le vent, il est amené à corriger aussi souvent que possible la dérive qui s'est produite (c'est du reste le rôle de du « pilote automatique » quand celui-ci est en fonctionnement). La part la plus importante de l'automatique est l'art (ou la science) de cette correction incessante, appelée en anglais un « feedback » et en français une « rétroaction » ou un « bouclage » ou un « asservissement » (à condition de ne pas donner à ce dernier terme la connotation péjorative qu'il revêt habituellement). On le voit sur ces exemples, un bouclage vient modifier, pour la rendre viable, une stratégie *a priori* dont la mise au point est souvent désignée en automatique par le vocable « planification de trajectoire » (thème qui est abordé dans le corps de cet article).

Les systèmes bouclés se rencontrent partout dans la nature, et en particulier dans tout organisme vivant. Pour que la température du corps humain se maintienne à 37° quelle que soit la température extérieure, il faut bien que des mécanismes de régulation soient à l'œuvre ; il en va de même pour toutes les grandeurs qui doivent être maintenues constantes (pH du sang, taux d'hémoglobine, etc.) Dans la société également, toutes sortes de rétroactions sont présentes pour éviter, dans la mesure du possible, que celle-ci ne parte à la dérive (modification des taux d'intérêt, aide aux entreprises, aux chômeurs, etc.) Néanmoins, la science qui étudie les systèmes bouclés de manière générale et systématique est, à l'exclusion de toute autre, l'automatique.

L'une des difficultés majeures que l'on rencontre avec les systèmes bouclés est la possible instabilité de ceux-ci. Disons en première approximation qu'un système est *stable* lorsque toutes ses variables convergent vers des valeurs finies, dites « valeurs d'équilibre », et *instable* lorsqu'il n'en est pas ainsi (cf. équations DIFFÉRENTIELLES) ; plus de précisions concernant la stabilité, notion essentielle en automatique, figurent également dans le corps du présent article. Il existe certes des systèmes en boucle ouverte instables, mais ce sont des cas relativement rares : les avions de nouvelle génération, un alternateur débitant de la puissance vers un centre de consommation éloigné, une fusée au moment du décollage, etc. En revanche, rien de plus banal que de rendre instable un système par un bouclage maladroit. Que l'on songe à un jeune enfant qui s'évertue à prendre une douche : l'eau est-elle froide, il veut la tiédir en ouvrant trop grand le robinet d'eau chaude, et reçoit de l'eau brûlante ; par réaction et excès inverse, il est aspergé d'eau glacée, et ainsi de suite. L'erreur ici est double : l'action effectuée est trop tardive (il ne faut pas attendre que l'eau soit glacée pour modifier le réglage) et trop brutale (les robinets doivent être actionnés plus doucement). L'instabilité d'un système bouclé est souvent due à l'une ou l'autre de ces erreurs.

La manière adéquate de décrire un système est essentiellement affaire de point de vue. Considérons le TGV Paris-Grenoble (exemple qui se veut plus pédagogique que réaliste). Pour l'agent chargé de surveiller le trafic ferroviaire, l'important est de savoir à un moment donné si ce train a ou n'a pas dépassé Lyon, s'il roule ou stationne dans une gare, s'il est engagé ou non sur la voie prévue, s'il est ou non l'objet d'une panne, etc. Chacun de ces « états » x_i (i appartenant à un ensemble d'indices I) peut être représenté par un 0 ou un 1 et l'état global du système est la suite des x_i (laquelle qui est dite finie lorsque I est un ensemble fini $\{1, \dots, n\}$, ce qui est le cas le plus fréquent). Il revient à l'agent de surveillance de prendre la décision pertinente compte tenu de cet état (qui ne peut bien entendu faire abstraction des autres trains du réseau ferroviaire) et cette décision peut également être représentée par une suite finie de 0 et de 1 (signifier au TGV de continuer, ou de stopper immédiatement, ou de stationner momentanément à la prochaine gare, ou de redémarrer, ou de revenir à l'aiguillage précédent, ainsi de suite). La logique qui préside à ces décisions obéit aux règles de l'algèbre de Boole (cf. algèbre et anneau de BOOLE) où toute proposition relative à l'état x s'exprime en fonction des coordonnées x_i à l'aide des opérations de base $\vee$ (« ou »), $\wedge$ (« et ») et $\neg$ (« non »). Une décision, qui est le résultat d'un tel calcul, peut être prise par un automate se substituant à l'opérateur humain (cf. AUTOMATISATION). Le système « TGV Paris-Grenoble » ainsi considéré est un « système à événements discrets » (vocabulaire abrégé par le sigle S.E.D.).

La programmation des automates réalisant la commande automatique des systèmes à événements discrets (c'est-à-dire prenant, pour ce qui les concerne, les décisions appropriées de manière autonome) est facilitée par des langages graphiques tels que le GRAFCET ou les réseaux de Petri. Ces derniers, dont il existe des variantes plus ou moins élaborées (réseaux de Petri colorés, stochastiques, etc.) sont théoriquement plus généraux que le GRAFCET, mais le langage désigné par cet acronyme offre l'intérêt d'être normalisé et directement compatible avec les automates programmables industriels (couramment désignés par le sigle A.P.I.), ce qui explique le plus grand intérêt que lui porte encore le monde industriel. La frontière qui existe entre l'automatique des systèmes à événements discrets (également appelée « automatique discrète ») et l'informatique est fort ténue, dans la mesure où les fonctions de base « ou », « et » et « non » évoquées plus haut sont à la base de la programmation informatique, et où les progrès réalisés en matière de microordinateurs permettent dans de nombreux cas de choisir ce matériel standard pour réaliser des automates. Notons toutefois que la dimension temporelle est essentielle en automatique : une décision pertinente à un moment donné peut s'avérer néfaste, voire catastrophique quelques instants plus tard. Le temps mis pour réaliser les calculs et transmettre les données joue donc un rôle crucial : ces calculs et ces transmissions doivent être effectués en « temps réel ». Le développement actuel de « l'informatique temps réel » et de réseaux informatiques spécifiques permettant de maîtriser les durées des transmissions et de garantir leur fiabilité (par exemple les « réseaux de terrain ») permettent de rapprocher encore l'informatique de l'automatique discrète. Nous ne détaillerons pas davantage dans cet article les notions relatives à cette dernière (cf. CYBERNETIQUE).

L'automatique dite « continue », qui fait l'objet de tous les développements qui suivent, étudie les systèmes « continus ». En première approximation, on peut définir ces systèmes comme étant ceux dont « l'état » $x(t)$ à chaque instant t (la notion d'état ne sera définie que plus loin avec précision) ne peut pas se représenter simplement, comme plus haut, par une suite de nombres binaires 0 ou 1, mais par un vecteur dont les composantes sont des variables réelles. Considérons par exemple le moteur qui entraîne notre TGV Paris-Grenoble. Il s'agit d'un moteur électrique, à courant continu pour les anciennes générations, synchrone pour les générations un peu plus récentes et asynchrone pour les générations actuelles ; son état x a pour composantes des variables électriques et mécaniques, donc à valeurs dans l'ensemble $\mathfrak{R}$ des nombres réels, ce qui fait de ce moteur un « système continu ». La variable t , désignant le temps, parcourt dans le cas présent la droite réelle $\mathfrak{R}$ ou un intervalle de celle-ci : il s'agit du temps habituel, appelé « temps continu ». L'alimentation de ce moteur (qui en constitue la commande) doit être ajustée à chaque instant en fonction des conditions variables de son fonctionnement (direction et force du vent, inclinaison de la voie, nombre et éventuellement déplacements des voyageurs) de manière que la vitesse du TGV soit maintenue constante, ce qui implique que ce système doit être commandé en boucle fermée. Actuellement, la commande des systèmes continus se fait presque toujours par calculateur (appelé, dans ce contexte, « régulateur numérique »). Celui-ci n'acquiert les données (en l'occurrence, l'état du moteur) et ne fournit les résultats de ses calculs qu'à des instants multiples de la « période d'échantillonnage » T , donc à des instants de la forme kT où k parcourt l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs ou un intervalle de celui-ci. Le « temps » propre au calculateur, qui est donc une variable entière (à la multiplication près par la période d'échantillonnage), est appelé le « temps discret », par opposition au « temps continu » dont il était question plus haut. Il est souvent utile de considérer le système à commander (en l'occurrence le moteur du TGV) comme le « fait le calculateur » (ce type d'image anthropomorphique est souvent commode), c'est-à-dire uniquement aux instants d'échantillonnage (à condition que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment élevée pour qu'il n'y ait pas de perte d'information, conformément au théorème de Shannon : cf. théorie du SIGNAL). Ce système, qui reste « continu », devient alors « à temps discret ». Nous voyons donc apparaître

deux classes de systèmes continus : ceux qui sont « à temps continu » et ceux qui sont « à temps discret » ; les régulateurs numériques sont de ce dernier type.

L'objet de l'automatique continue est multiple. Il comprend en effet (a) la modélisation, (b) l'identification, (c) l'analyse et (d) la commande. (a) Les systèmes auxquels elle s'adresse l'automatique continue font partie du monde matériel et obéissent donc aux lois de la physique. Pour autant, il n'est pas toujours possible de déterminer les équations différentielles (ou aux dérivées partielles) qui régissent leur évolution, et il est alors nécessaire de recourir à des modèles comportementaux, plus ou moins empiriques et qualitatifs, qu'on peut obtenir de diverses manières, par exemple grâce à des techniques fondées sur la logique floue ou les réseaux de neurones (cf. AUTOMATISATION). Mais nous nous placerons dans ce qui suit dans le cas, le plus fréquent, où la « mise en équation » du système peut être réalisée. La *modélisation* consiste alors à déterminer la structure des équations mathématiques qui régissent le comportement du système, et aussi à fixer *a priori* la valeur de certains de ses paramètres : par exemple des longueurs, des masses, des valeurs de résistances, de capacités, etc. (b) Mais il est souvent impossible d'obtenir une connaissance *a priori* complète et précise de tous les paramètres du modèle. Pour affiner ou compléter cette connaissance, il est alors nécessaire de procéder à une *identification* du système : à partir des réactions de celui-ci à des sollicitations données et connues, on peut, sous certaines conditions, identifier les paramètres encore inconnus. (c) Une fois un système modélisé et identifié, il devient possible de faire l'*analyse* de ses propriétés structurelles (telles que la stabilité, la commandabilité, l'observabilité, etc., qui seront détaillées plus loin). (d) Sur la base de la connaissance du système ainsi acquise (au travers de la modélisation, de l'identification et de l'analyse), on peut en concevoir la *commande*. — Il reste enfin à effectuer la *mise en œuvre* de cette dernière au moyen des calculateurs temps réel, des actionneurs, des capteurs et des systèmes de transmission de données appropriés ; cette question de la mise en œuvre sort du cadre de cet article (cf. CYBERNETIQUE).

Le rôle d'un bouclage est de minimiser un écart $e = y - r$ où y est la *sortie* du système (dans le cas du moteur du TGV, y est sa vitesse de rotation, mais dans le cas général y peut être un vecteur ayant plusieurs composantes) et où r (qui a le même nombre de composantes que y) est le signal de référence imposé par le « pilote » du système bouclé. Dans de nombreux cas, r est, en fonction du temps, constant par morceaux. La *performance* du système bouclé, supposé stable, se juge traditionnellement suivant au moins trois critères : 1°) la *précision* : la question est de savoir si en régime permanent, c'est-à-dire au bout d'un laps de temps en théorie infiniment long, $e(t)$ est réduit à zéro, ou tout au moins à une valeur d'équilibre e_∞ telle que $|e_\infty|$ est suffisamment petite, pour une référence r maintenue constante et en absence de toute perturbation d provenant du milieu extérieur (dans l'exemple du moteur du TGV, une telle perturbation pourrait être un changement dans l'inclinaison de la voie, une saute de vent, etc.). 2°) La *rapidité* : après une variation de $e(t)$ due à une modification de $r(t)$ ou au surgissement d'une perturbation $d(t)$, cet écart $e(t)$ est-il rapidement réduit à sa valeur asymptotique e_∞ ? La rapidité est souvent quantifiée par le *temps de réponse* t_r à $n\%$: la référence r (ayant une seule composante) variant brusquement (« en échelon ») d'une valeur r_1 à une valeur $r_2 > r_1$, t_r est le laps de temps au bout duquel, si aucune perturbation ne vient affecter le système, $|e(t)|$ devient définitivement inférieur à $n\%$ de $r_2 - r_1$ (il est courant de choisir $n = 95$ mais, suivant les applications, d'autres pourcentages peuvent être plus pertinents). 3°) Le *dépassement* : dans la situation précédente, si la précision est parfaite, la sortie y , dont la valeur passe de r_1 à r_2 (au bout d'un laps de temps très supérieur à t_r), prend-elle transitoirement des valeurs supérieures à r_2 , et si oui, en quelle proportion relativement à l'écart $r_2 - r_1$? (Un dépassement nul peut être une contrainte du cahier des charges dans certaines applications, notamment en robotique, et un faible dépassement est toujours souhaitable.)

Pour qu'un système bouclé puisse être performant, encore faut-il que le système en boucle ouverte ait les caractéristiques nécessaires (s'il s'agit par exemple d'un moteur, celui-ci doit avoir la puissance requise), mais cela n'est pas suffisant. De manière générale, mieux un système est connu (donc plus le modèle dont on dispose est précis), meilleures sont les performances qu'on peut en espérer en boucle fermée. A l'inverse, les incertitudes de modèle, quand elles sont importantes, obligent à concevoir une commande « robuste », qui va agir sur le système avec une certaine prudence, ce qui est évidemment antinomique avec la notion de performance. Comme la plupart (sinon la totalité) des sciences de l'ingénieur, l'automatique ne permet que de gérer des compromis ; parmi ceux-ci, le compromis robustesse/performance est l'un des plus cruciaux. La conception d'une « commande robuste » commence nécessairement par une phase d'analyse : celle, précisément, des erreurs de modèle. Certains paramètres peuvent être entachés d'une grosse incertitude sans que cela ait beaucoup d'importance car ils altèrent peu le comportement du système. D'autres, au contraire, sont extrêmement

critiques. Si une bonne identification de ces paramètres n'a pas été possible (pour différentes raisons, dont l'une peut être le coût qui résulterait du recueil de toutes les données nécessaires), l'automaticien sera contraint à concevoir une commande très robuste vis-à-vis des variations de ces paramètres, et il en résultera des performances médiocres. Les « dynamiques négligées » sont également une erreur de modèle toujours présente. Un composant mécanique, telle que l'arbre d'un moteur, est le siège de flexions et de torsions qui ne se produisent qu'à des fréquences relativement élevées (aux basses fréquences, il est souvent raisonnable de le considérer comme un « solide rigide et indéformable »). De même un circuit électrique, habituellement représenté par quelques équations différentielles très simples, doit être décrit par des équations aux dérivées partielles s'il s'avère nécessaire de tenir compte des phénomènes très rapides de propagation des ondes (ce qui peut être le cas, en effet, pour certains types d'applications). Ainsi, la représentation exacte d'un système jusqu'à des fréquences très élevées exige un modèle complexe, non linéaire et comportant un grand nombre (si ce n'est une infinité) de « modes ». Or un tel modèle est généralement mal adapté pour la conception d'une loi de commande. Des simplifications sont donc nécessaires, et l'automaticien travaille inévitablement avec un modèle entaché d'erreurs. Il doit bien entendu en tenir compte et faire en sorte que la commande sollicite très peu les parties mal connues du système (tandis qu'à l'inverse, elle agisse avec vigueur sur les parties bien connues pour que les performances soient les meilleures possibles). Cette « modulation » de l'énergie de la commande en fonction des incertitudes de modèle est le principe même de la commande robuste.

C'est par souci de simplicité que les automaticiens utilisent le plus souvent des modèles linéaires alors que les systèmes réels sont, quant à eux, presque toujours non linéaires. La linéarité des modèles est donc le résultat d'approximations, dont l'intérêt est de pouvoir appliquer par la suite les méthodes de l'algèbre linéaire et du calcul symbolique, qui sont classiques au plan mathématique (cf. algèbre LINEAIRE ET MULTILINEAIRE ; calcul SYMBOLIQUE) alors que la théorie générale des systèmes non linéaires est fort complexe (cf. SYSTEMES DYNAMIQUES DIFFERENTIABLES). Néanmoins, ces approximations peuvent être pénalisantes du point de vue des performances, et c'est pourquoi se sont développées des techniques de « commande non linéaire » qui sont pour la plupart des applications de la géométrie différentielle (cf. VARIETES DIFFERENTIABLES) ; d'autres approches sont fondées sur l'utilisation de l'algèbre différentielle ; d'autres encore, sur l'utilisation de fonctions de Liapounoff (cf. équations DIFFERENTIELLES).

D'autre part, il est tentant de chercher à affiner la connaissance que l'on a du système tandis qu'on en fait la commande, de manière à pouvoir augmenter progressivement les performances. Ceci mène au concept de « commande adaptative », et plus précisément de « commande adaptative indirecte » (le seul type de commande adaptative que nous évoquerons), dont le principe est d'identifier le système en même temps qu'on le commande et de recalculer le régulateur à chaque pas de calcul (ou, éventuellement, tous les n pas de calcul, $n > 1$) à partir des nouveaux paramètres identifiés. Ce principe s'inspire du comportement de l'être humain (comme de tous les êtres vivants) qui devient de plus en plus efficace dans son environnement à mesure qu'il apprend à le connaître. La commande adaptative n'est pas dénuée d'antinomies qui en font toute la difficulté. Par exemple une « bonne régulation » est telle que la sortie du système suit avec une très bonne précision le signal de référence ; si celui-ci est constant et que l'environnement engendre peu de perturbations, les différentes variables du système sont à peu de choses près des constantes. Or, pour que l'algorithme d'identification fonctionne correctement, compte tenu notamment des bruits de mesure provenant des différents capteurs, il faut au contraire que les variables du système varient de manière significative pour donner suffisamment d'information. Il est donc nécessaire, pour éviter que n'apparaissent de loin en loin des explosions dues à une trop grande dérive du modèle identifié (explosions ou « instabilités temporaires » qui, après avoir fortement sollicité le système, permettent à l'algorithme d'identification de converger, donc à la boucle fermée de recouvrer une forme de « stabilité » pour une certaine durée), de définir des seuils de rapport signal/bruit en dessous desquels les coefficients du régulateur ne doivent pas être mis à jour. Le réglage de ces seuils n'est pas simple à réaliser ; de plus, d'autres précautions sont à prendre, que nous ne pouvons détailler ici.

Dans certains cas, il s'avère souhaitable de déterminer la commande qui minimise un critère (pouvant par exemple être de nature économique ou être une consommation d'énergie) sous certaines contraintes. Cette problématique est celle de la commande optimale (cf. OPTIMISATION ET CONTROLE). Enfin, il est à mentionner que, si dans la plupart des applications le modèle du système servant à concevoir la commande est de dimension finie, c'est-à-dire décrit par un nombre fini d'équations différentielles ordinaires, des recherches portent depuis plus de 30 ans sur la commande des systèmes de dimension infinie, sur la base d'un modèle décrit par des équations aux dérivées partielles. Il s'agit là d'un vaste sujet qui est abordé au moyen de méthodes provenant de branches très diverses des mathématiques : espaces fonctionnels, opérateurs pseudo-différentiels, développements asymptotiques de Gevrey, D-modules, etc. (cf. équations aux DERIVEES PARTIELLES).

1. Modélisation

Modèles non linéaires

La modélisation est un problème épineux, car pour savoir modéliser des systèmes électriques, mécaniques, thermiques, hydrauliques et autres, il faudrait être tout à la fois électricien, mécanicien, thermicien, hydraulicien, etc. Aussi une bonne modélisation est-elle souvent le fruit d'une collaboration entre l'automaticien et un ou plusieurs spécialistes des disciplines que nous avons citées ; encore le premier doit-il avoir une culture scientifique suffisamment large pour pouvoir entretenir avec les seconds un dialogue fécond. Considérons un cas simple, celui du pendule inversé de la figure 1 (dont le comportement n'est pas sans rapport avec celui d'une fusée au moment du décollage).

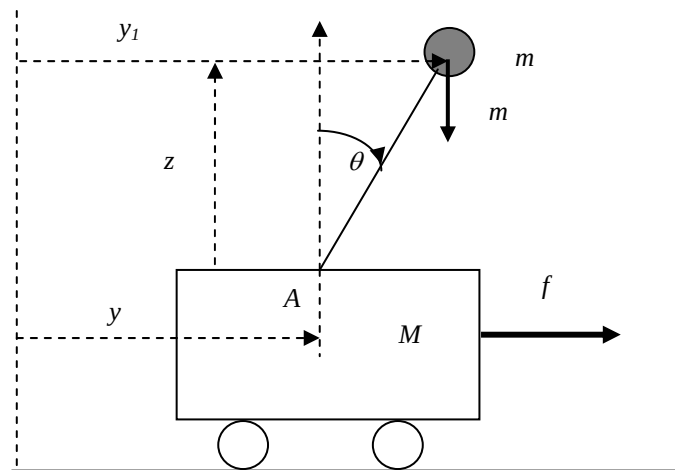


Figure 1 : pendule inversé

Ce pendule est constitué d'un chariot de masse M sur lequel s'articule une tige de longueur l terminée par une masse m . Les frottements et la masse de la tige sont supposés négligeables et la masse est supposée ponctuelle. On agit sur ce pendule inversé au moyen d'une force f s'appliquant au chariot qui se meut horizontalement. Il s'agit d'un système holonôme (cf. MECANIQUE ANALYTIQUE) dont les coordonnées généralisées q_1 et q_2 sont respectivement y (l'abscisse du chariot) et θ (l'angle que fait la tige avec la verticale). L'énergie cinétique du chariot est $T_1 = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$ tandis que celle de l'ensemble (tige+masse) est

$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)$ où y_1 et z_1 désignent respectivement l'abscisse et l'ordonnée de la masse m , à savoir

$$\begin{cases} y_1 = y + l \sin \theta \\ z_1 = l \cos \theta \end{cases}$$

L'énergie cinétique du pendule est $T = T_1 + T_2$; son énergie potentielle est celle de la masse m , c'est-à-dire $U = m g l \cos \theta$ où g est l'accélération de la pesanteur. Le Lagrangien est $L = T - U$ et les équations de Lagrange qui régissent le mouvement s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

avec, dans le cas présent, $i \in \{1, 2\}$ et où Q_i est la force généralisée *externe* (c'est-à-dire ne dérivant pas du potentiel U) suivant q_i . Ici, $Q_1 = f$ et $Q_2 = 0$, et on obtient donc les équations du pendule :

$$\begin{cases} (M+m)\frac{d^2 y}{dt^2} - ml \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + ml \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - f = 0 \\ l \frac{d^2 \theta}{dt^2} - g \sin \theta + \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Le système d'équations (1) est de la forme générale

$$\mathbf{F}(w, \dot{w}, \dots, w^{(\alpha)}) = 0 \quad (2)$$

où w est le vecteur dont les composantes $w_1, \dots, w_k$ sont les *variables* du système considéré. La fonction $\mathbf{F}$ est généralement vectorielle, ayant r composantes si l'entier r désigne le nombre d'équations. Le système défini par (2) est dit *stationnaire* si les coefficients mis en jeu par la fonction $\mathbf{F}$ sont constants, et *instationnaire* sinon.

Modèles linéaires

Soit Σ le système défini par (2), et supposons-le stationnaire. Un point $w^* = [w_1^* \ \dots \ w_k^*]$ est un *point d'équilibre* de Σ si $\mathbf{F}(w^*, 0, \dots, 0) = 0$. Dans le cas du pendule inversé régi par (1), cette égalité entraîne $f^* = \sin \theta^* = 0$. Ce système admet donc une infinité de points d'équilibre : y^* quelconque, $\theta^* = 0$ (modulo π) et $f^* = 0$. Bien entendu, le pendule est en « position inversée » pour $\theta^* = 0$ (modulo 2π).

Le système Σ est dit *linéarisable* autour du point d'équilibre w^* si $\mathbf{F}$ est différentiable dans un voisinage de $(w^*, 0, \dots, 0)$. Soit alors Δw un « petit accroissement » dans le sens où Δw et ses dérivées jusqu'à l'ordre α sont « petits ». L'*approximation linéaire* de Σ autour de w^* s'obtient en remplaçant dans (2) la fonction $\mathbf{F}$ par son développement de Taylor au premier ordre au voisinage de $(w^*, 0, \dots, 0)$. On obtient alors le *système linéaire* Σ_l d'équation

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w^{(i)}}(w^*, 0, \dots, 0) \Delta w^{(i)} = 0. \quad (3)$$

Par exemple, en linéarisant (1) autour de $(y^* = 0, \theta^* = 0, f^* = 0)$, on obtient les équations du pendule inversé linéarisé :

$$\begin{cases} (M+m)\frac{d^2 y}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} - f = 0 \\ l \frac{d^2 \theta}{dt^2} - g\theta + \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Revenons à la linéarisation du système (2) en se ramenant au cas où $w^* = 0$ par translation de l'origine. On a alors $w = \Delta w$ et (3) est de la forme $E(\partial)w = 0$ où $\partial = \frac{d}{dt}$ et $E(\partial)$ est une matrice polynômiale à r lignes et k colonnes, c'est-à-dire est un élément de $\mathfrak{R}[\partial]^{r \times k}$, $\mathfrak{R}[\partial]$ désignant l'anneau des polynômes en ∂ à coefficients réels.

2. Théorie des systèmes

Systèmes et modules

Tous les systèmes considérés dans ce qui suit sont *linéaires et à coefficients constants*. L'opérateur qui est à la base de la théorie des systèmes à temps continu est la dérivation ∂ (voir ci-dessus) tandis que pour les

systèmes à temps discret il s'agit de « l'opérateur d'avance » $q : \xi(t) \rightarrow \xi(t+1)$. Posons $\nabla = \partial$ ou q et $\mathbf{R} = \Re[\nabla]$. Un système (qu'il soit à temps continu ou à temps discret) est décrit par une équation de la forme

$$E(\nabla)w = 0, \quad (5)$$

$E(\nabla) \in \mathbf{R}^{r \times k}$, ce qui généralise la formulation précédente. Il n'y a pas une manière unique de décrire un même système ; il n'y a pas même unicité du nombre de variables et du nombre d'équations dans les différentes descriptions possibles. Par exemple, (6) et (7) ci-dessous

$$(\nabla^2 + a_1 \nabla + a_2)y = (b_1 \nabla + b_2)u \quad (6)$$

$$\begin{cases} \nabla x = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (7)$$

où $x = [x_1 \ x_2]^T$, sont deux représentations du même système. Elles ont en commun de définir des $\mathbf{R}$ -modules identiques à un isomorphisme près (cf. algèbre LINEAIRE ET MULTILINEAIRE) : le premier, $\mathbf{M}_1$, est engendré par les variables y et u vérifiant (6) ; le second, $\mathbf{M}_2$, est engendré par les variables x_1, x_2 et u vérifiant la première égalité de (7) (d'après la seconde, y appartient à $\mathbf{M}_2$). Un système linéaire s'identifie dès lors (ou est « naturellement associé ») à un $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{M}$ de type fini (c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments). Considérons par exemple l'expression (6) de $\mathbf{M}$ et soit $\bar{y}$ l'image canonique de y dans le module quotient $\mathbf{M}/[u]$, où $[u]$ désigne le $\mathbf{R}$ -module engendré par u . On a

$$(\nabla^2 + a_1 \nabla + a_2)\bar{y} = 0$$

et $\mathbf{M}/[u] = [\bar{y}]$ est donc un « module de torsion » (car chacun de ses éléments $\bar{m}$ est un « élément de torsion », c'est-à-dire vérifie une équation différentielle ou aux différences *autonome* $p(\nabla)\bar{m} = 0$, $0 \neq p(\nabla) \in \mathbf{R}$, avec dans la cas présent $p(\nabla) = \nabla^2 + a_1 \nabla + a_2$). Cette propriété permet de définir u comme étant l'entrée du système considéré ; dans le cas où u a plusieurs composantes $u_1, \dots, u_m$, le module $[u]$ engendré par ces variables est de plus supposé libre de rang m . La sortie du système est y ; dans le cas général, y peut avoir p composantes $y_1, \dots, y_p$ qui sont des éléments de $\mathbf{M}$.

Représentation d'état

On peut montrer que tout système (linéaire et stationnaire) admet une représentation dite « d'état », de la forme

$$\begin{cases} \nabla x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}(\nabla)u \end{cases} \quad (9)$$

où $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \Re^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \Re^{p \times n}$ et $\mathbf{D}(\nabla) \in \Re^{p \times m}$ sont appelées respectivement les matrices d'état, d'entrée, de sortie et de « terme direct » et où le vecteur x (ayant n composantes x_i) est appelé l'état du système. (En revanche, seule une classe bien particulière de systèmes *non linéaires* admet une représentation d'état, dont la forme est une généralisation de (9).) L'équation d'état, à savoir la première équation de (9), est une équation différentielle ou aux différences vectorielle linéaire *du premier ordre*, ce qui présente des avantages de simplicité ; la seconde équation de (9), appelée l'équation de sortie, montre que la sortie y s'exprime linéairement et uniquement en fonction de l'état et éventuellement de la commande u et d'un nombre fini de termes $\nabla^i u$, $i \geq 1$; de sorte que l'état est un résumé du *passé du système* dans le sens où le second n'influe sur la sortie qu'au travers du premier. Ce système est dit *propre* si $\mathbf{D}(\nabla) \in \Re^{p \times m}$ et *strictement propre* si $\mathbf{D} = 0$. Les systèmes *impropres* ne sont pas réalisables en pratique (notamment, un système à temps discret impropre est *non causal*, puisque sa sortie à un instant donné dépend des valeurs futures de l'entrée).

Un système Σ est dit *commandable* si le $\mathbf{R}$ -module associé $\mathbf{M}$ est libre, c'est-à-dire admet une base $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq m}$, alors appelée une *sortie plate* de Σ .

Il est fréquent qu'un système commandable ait une sortie plate dont la signification physique soit claire. Considérons par exemple le pendule inversé linéarisé (4). L'abscisse $y_1 = y + l\theta$ de la masse m est une sortie plate. En effet, de la seconde égalité de (4) on tire $\theta = \ddot{y}_1 / g$, par conséquent $y = y_1 - \ddot{y}_1 l / g$, et d'après la première égalité de (4) on obtient

$$f = \ddot{y}_1 (M + m) - y_1^{(4)} M l / g. \quad (10)$$

La variable y_1 est une base de $\mathbf{M}$ car (i) elle est $\mathbf{R}$ -linéairement indépendante (ce qui trivial dans le cas présent puisqu'elle n'a qu'une composante qui n'est pas un élément de torsion), (ii) tous les éléments de $\mathbf{M}$ sont des combinaisons $\mathbf{R}$ -linéaires de y_1 . Du point de vue physique, y_1 est la grandeur qui donne le plus d'information sur le système (un jongleur qui voudrait faire tenir le pendule inversé en équilibre par de petits déplacements du chariot aurait très probablement les yeux fixés sur la masse m tout au long de son numéro).

Ceci a des conséquences importantes pour la *planification de trajectoire*. Supposons qu'on veuille transférer le pendule inversé d'une position d'équilibre à une autre entre les instants t_0 et t_1 , y passant de la valeur $y(t_0) = 0$ à $y(t_1) > 0$; supposons de plus qu'on veuille effectuer ce passage en imposant à l'abscisse y_1 d'être strictement croissante (donc sans aucune oscillation de la masse m). Les conditions d'équilibre, exprimées en fonction de la variable y_1 , s'écrivent pour $i \in \{0, 1\}$: $y_1(t_i) = y(t_i)$, $y_1^{(\beta)}(t_i) = 0$ ($1 \leq \beta \leq 4$). Elles peuvent être satisfaites si l'on choisit pour trajectoire $t \rightarrow y_1(t)$ un polynôme de degré 9 ayant les coefficients appropriés, suivant la méthode d'interpolation de Hermite (cf. approximation des FONCTIONS). La *commande en boucle ouverte* à appliquer au système s'obtient alors par (10). (Dans le cas présent, le système étant instable, il est de plus nécessaire de le stabiliser par bouclage autour de la « trajectoire nominale » ainsi définie.) La trajectoire de la sortie plate y_1 lorsque $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, est représentée sur la figure 2.

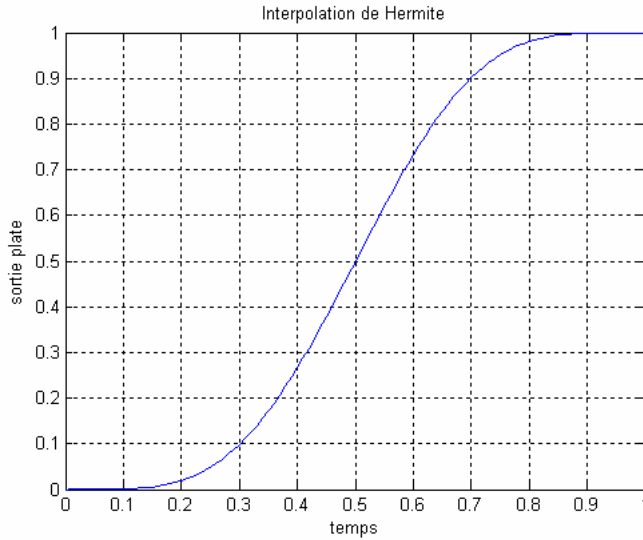


Figure 2 : trajectoire de la sortie plate

Dans le cas général, on peut, de manière systématique et simple, vérifier qu'un $\mathbf{R}$ -module de type fini est libre et en déterminer une base. Ces deux points se traitent en effet grâce au calcul matriciel du fait que $\mathbf{R}$ est un anneau principal. Si Σ est décrit par la représentation d'état (9) (et on a vu qu'on peut toujours se ramener à ce cas), on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante, appelée « critère de Kalman » : Σ est commandable si, et seulement si $\text{rang } \Gamma = n$ où Γ est la « matrice de commandabilité » définie par

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

On dit alors, par abus de langage, que « $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est commandable ».

Observabilité

Soit un système Σ , d'entrée $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et de sortie $y = (y_i)_{1 \leq i \leq p}$. Ce système est associé à un $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{M}$, et si l'on désigne par $[y, u]$ le $\mathbf{R}$ -module engendré par les composantes y_i et u_i , on a bien entendu l'inclusion $[y, u] \subset \mathbf{M}$. Le système Σ est dit *observable* si $[y, u] = \mathbf{M}$, c'est-à-dire si toute variable de Σ est une combinaison $\mathbf{R}$ -linéaire des composantes de l'entrée et de la sortie.

Si Σ est décrit par la représentation d'état (9), on montre que l'observabilité de Σ équivaut à la commandabilité de $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$; ainsi, par abus de langage, « $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ est observable si, et seulement si $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ est commandable », et c'est pourquoi l'observabilité et la commandabilité sont appelées des propriétés « duales ». Notons toutefois que cette dualité n'a de sens que relativement à une représentation d'état. En effet, alors que la commandabilité est, dans sa formulation intrinsèque, une propriété indépendante du choix des entrées et des sorties, l'observabilité leur est au contraire indissociablement liée.

Un système Σ est dit *minimal* s'il est commandable et observable.

Matrice de transfert

Soit un système Σ sous forme d'état (9), à temps continu (resp. à temps discret), et $\hat{u}$ et $\hat{y}$ les transformées de Laplace (resp. en z) de y et de u à conditions initiales nulles; soit également $\sigma = s$ (resp. $\sigma = z$) où s est la variable de Laplace et z est la variable habituelle de la « transformée en z » (cf. calcul SYMBOLIQUE); la variable de Laplace s'écrit habituellement p ou s , et nous utiliserons cette dernière notation pour éviter toute confusion avec le nombre de sorties de Σ . Il vient

$$\hat{y} = G(\sigma) \hat{u}, \quad G(\sigma) = \mathbf{C}(\sigma \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}(\sigma). \quad (11)$$

La matrice $G(\sigma)$ fait partie de l'ensemble $\mathfrak{R}(\sigma)^{p \times m}$ des matrices à p lignes et m colonnes dont les éléments appartiennent au corps $\mathfrak{R}(\sigma)$ des fractions rationnelles en σ à coefficients réels; $G(\sigma)$ est appelée la *fonction de transfert* de Σ si ce système est *monovarié*, c'est-à-dire tel que $m = p = 1$, et sa *matrice de transfert* si ce système est *multivarié*, c'est-à-dire n'est pas monovarié; $G(\sigma)$ est dite *propre* si $\mathbf{D}(\sigma) \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ et *strictement propre* si $\mathbf{D}(\sigma) = 0$. Il n'est pas nécessaire de passer par une représentation d'état pour déterminer $G(\sigma)$. Par exemple, le système (6) a pour fonction de transfert

$$G(\sigma) = \frac{b_1 \sigma + b_2}{\sigma^2 + a_1 \sigma + a_2}.$$

Si $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = -1$, on obtient en particulier

$$G(\sigma) = \frac{\sigma - 1}{\sigma^2 - 1} = \frac{1}{\sigma + 1}. \quad (12)$$

La fonction de transfert d'un système monovarié peut être caractérisée par sa *réponse fréquentielle*. Cette dernière est $G(i\omega)$ dans le cas du temps continu ($\omega \in [0, +\infty[$) et $G(e^{i\theta})$ dans le cas du temps discret ($\theta \in [0, \pi/2[$). Pour en donner une interprétation concrète, considérons le premier cas et supposons que l'entrée soit sinusoïdale de pulsation ω , par exemple $u(t) = A \cos \omega t$; pour plus de commodité, écrivons que $u(t) = \text{Re}(u_c(t))$ avec $u_c(t) = A e^{i\omega t}$; alors la sortie du système est (sous réserve que celui-ci soit stable: voir *infra*) $y(t) = \text{Re}(y_c(t))$ avec $y_c(t) = G(i\omega) u_c(t)$. Une représentation graphique commode de la réponse fréquentielle est le *diagramme de Bode*. Pour un système à temps continu (resp. à temps discret), ce diagramme est constitué de la courbe représentant la fonction $\omega \rightarrow |G(i\omega)|$ (resp. $\theta \rightarrow |G(e^{i\theta})|$), appelée « courbe d'amplitude » et de celle représentant la fonction $\omega \rightarrow \arg(G(i\omega))$ (resp. $\theta \rightarrow \arg(G(e^{i\theta}))$), appelée « courbe de phase »; comme plus haut, la « pulsation » ω varie entre 0 et $+\infty$ tandis que la « pulsation normalisée » θ

varie entre 0 et $\pi/2$. On choisit habituellement pour ω et θ une échelle log (où log désigne le logarithme en base 10), pour le module $|G|$ une échelle en décibels ($20 \log$) et pour l'argument $\arg(G)$ une échelle en degrés. Notons que la restriction à l'axe imaginaire de la transformation de Laplace dans le cas du temps continu, et la restriction au cercle unité de la transformation en z dans le cas du temps discret, ne sont autres que la transformation de Fourier quand celle-ci est définie (cf. calcul SYMBOLIQUE).

Pour un système multivariable, on est amené à utiliser la notion de *valeur singulière* qui généralise pour une matrice la notion classique de module d'un nombre complexe. Soit $\mathbf{E}$ une matrice de rang r à éléments complexes ; les valeurs singulières non nulles de $\mathbf{E}$ sont les quantités

$$\sigma_k(\mathbf{E}) = \left(\lambda_k(\mathbf{E} \mathbf{E}^*) \right)^{1/2} = \left(\lambda_k(\mathbf{E}^* \mathbf{E}) \right)^{1/2}, \quad 1 \leq k \leq r$$

où $\mathbf{E}^*$ est la transposée-conjuguée de $\mathbf{E}$ et $\lambda_k(\cdot)$ est la k -ième valeur propre de la matrice entre parenthèses (ces valeurs propres étant rangées par ordre décroissant) ; la plus grande valeur singulière de $\mathbf{E}$ est notée $\bar{\sigma}(\mathbf{E})$; $\bar{\sigma}$ est une norme. Pour un système multivariable à temps continu (resp. à temps discret), ayant une matrice de transfert de rang r sur $\Re(\sigma)$, la courbe d'amplitude de Bode est généralisée en la remplaçant par les r courbes représentant les fonctions $\omega \rightarrow \sigma_k(G(i\omega))$ (resp. $\theta \rightarrow \sigma_k(G(e^{i\theta}))$), en utilisant une échelle log pour ω et θ et une échelle en décibels pour les valeurs singulières. La courbe de phase ne se généralise pas au cas des systèmes multivariables.

Stabilité

Soit un système Σ (supposé propre) qu'on peut supposer sans perte de généralité sous la forme d'état (9) et soit $\bar{x}$ l'état de ce système lorsque son entrée u est maintenue égale à zéro (au plan algébrique, $\bar{x}$ désigne le vecteur dont les composantes $\bar{x}_i$ sont les images canoniques des composantes x_i de x dans le module quotient $\mathbf{M}/[u]$, où $\mathbf{M}$ est le $\mathbf{R}$ -module associé à Σ). Il vient $\nabla \bar{x} = A \bar{x}$. Considérons les solutions de cette équation différentielle ou aux différences. Le système Σ est dit *stable* si toutes ces solutions tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$, et *marginalelement stable* si toutes ces solutions sont bornées.

Les valeurs propres de A sont appelées les *pôles* de Σ . Si ce système est à temps continu (resp. à temps discret), on montre qu'il est stable si, et seulement si tous ses pôles appartiennent au demi-plan gauche ouvert $\Re(s) < 0$ (resp. au disque unité ouvert $|z| < 1$), et qu'il est *marginalelement stable* si et seulement si tous ses pôles appartiennent au demi-plan gauche *fermé* (resp. au disque unité *fermé*), ceux appartenant à l'axe imaginaire (resp. au cercle unité), s'il en existe, étant des racines simples du polynôme minimal de A (cf. théorie SPECTRALE).

On peut également définir les pôles de la matrice de transfert $G(\sigma)$, appelés les *pôles de transmission* du système Σ . Nous ne pouvons le faire ici en toute généralité, mais si Σ est un système monovariable, il s'agit des pôles, au sens usuel, de la fraction rationnelle $G(\sigma)$. Considérons par exemple le système à temps continu Σ défini par

$$(\partial^2 - 1)y = (\partial - 1)u$$

qui est un cas particulier de (6). D'après (7), l'ensemble des pôles de Σ est $\{-1, 1\}$, et ce système n'est donc pas stable. Sa fonction de transfert est celle donnée par (12) avec $\sigma = s$, donc son unique pôle de transmission est -1 . On le voit sur cet exemple, l'analyse de la stabilité d'un système ne peut pas se faire à partir de ses pôles de transmission, *sauf si ce système est minimal* (dans ce cas, en effet, ses pôles et ses pôles de transmission coïncident). Le système Σ considéré plus haut n'est pas commandable ; en effet, on a $(\partial - 1)v = 0$ où $v = (\partial + 1)y - u$; la variable v est un élément de torsion non nul du $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{M}$ associé à Σ , et ce module n'est donc pas libre (car un module libre n'a pas d'élément de torsion autre que 0).

Zéros d'un système

On définit pour un système de nombreuses sortes de zéros qu'on ne peut pas toutes détailler ici. Soit un système Σ , associé à un $\mathbf{R}$ -module $\mathbf{M}$ et sous forme d'état (9). Soit d'autre part $\tilde{x}$ et $\tilde{u}$ les vecteurs dont les composantes sont les images canoniques des composantes de x et u dans le module quotient $\mathbf{M}/[y]$. On a

$$P(\nabla) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad P(\nabla) = \begin{bmatrix} \nabla I_n - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}(\nabla) \end{bmatrix}.$$

La matrice $P(\nabla)$ est appelée la « matrice de Rosenbrock » ou la « matrice-système » de Σ . Les « zéros invariants » de Σ sont les valeurs de la variable complexe σ pour lesquelles le rang de $P(\sigma)$ sur le corps des complexes devient inférieur au rang de $P(\nabla)$ sur $\mathcal{R}(\nabla)$. Si Σ est un système minimal monovarié, ses zéros invariants coïncident avec les zéros de sa fonction de transfert $G(\sigma)$. Un système minimal Σ est dit à *déphasage minimal* si tous ses zéros invariants sont « stables », c'est-à-dire appartiennent au demi-plan gauche ouvert dans le cas du temps continu et au disque unité ouvert dans le cas du temps discret.

3. Asservissements

Analyse d'un système bouclé

Un système bouclé, sous sa forme la plus classique, est représenté sur la figure 3, où P est le système à asservir et où K est le régulateur, dit à « un élément ». Ces deux systèmes sont supposés à temps continu, monovariés et minimaux, donc représentables par leurs fonctions de transfert respectives $P(s)$ et $K(s)$. Les signaux d_u et d_y sont des perturbations affectant respectivement l'entrée u et la sortie y du système P , tandis que b et r sont le bruit de mesure et le signal de référence.

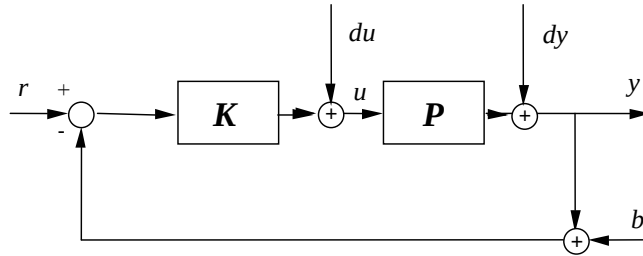


Figure 3: système bouclé avec régulateur à 1 élément

Ce système bouclé Σ est dit *stable* si le système minimal ayant pour entrée $\begin{bmatrix} r \\ d_u \end{bmatrix}$ et pour sortie $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ est stable (le signal de référence r peut être remplacé par d_y ou b dans cette définition). Soit $\frac{B(s)}{A(s)}$ et $\frac{R(s)}{S(s)}$ des représentations irréductibles des fractions rationnelles $P(s)$ et $K(s)$, la seconde étant supposée propre, la première strictement propre, et les polynômes $A(s)$ et $S(s)$ étant unitaires. On montre que Σ est stable si, et seulement si le polynôme $A_{bf} = AS + BR$ a toutes ses racines situées dans le demi-plan gauche ouvert ; ces racines sont appelées les *pôles* de Σ .

Une méthode graphique commode pour l'analyse de la stabilité en boucle fermée est le *Critère de Nyquist*. Soit $L(s) = P(s)K(s)$, appelée la « fonction de transfert de la boucle ouverte » ; nous supposons pour simplifier la présentation $P(s)$ et $K(s)$ n'ont pas de pôles sur l'axe imaginaire. Le *lieu de Nyquist* de $L(s)$ est, dans le plan complexe, le chemin $\omega \rightarrow L(i\omega)$, où ω varie de $-\infty$ à $+\infty$. Soit n_P et n_K le nombre de pôles de $P(s)$ et de $K(s)$ situés dans le demi-plan droit, et N le nombre de tours effectués par le lieu de Nyquist de $L(s)$ autour du point -1 (appelé « point critique ») dans le sens direct, en supposant que ce lieu ne passe pas par le point critique. D'après le Critère de Nyquist, Σ est stable si, et seulement si $N = n_P + n_K$.

De plus, compte tenu des erreurs de modèle, inévitablement présentes, il importe que la distance du lieu de Nyquist au point -1 ne soit pas trop petite. Cette distance est appelée la « marge de module » et notée Mm . Soit

$$S_i(s) = \frac{1}{1 + L(s)},$$

appelée « fonction de sensibilité ». Celle-ci appartient (si Σ est stable) à l'ensemble $\mathcal{RH}_\infty$ des fonctions de transfert propres ayant tous leurs pôles dans le demi-plan gauche ouvert. Cette ensemble $\mathcal{RH}_\infty$ est une $\mathcal{R}$ -algèbre normée (cf. algèbres NORMEES), la norme $\|f\|_\infty$ d'un élément $f \in \mathcal{RH}_\infty$ (appelée « norme $\mathcal{H}_\infty$ ») étant définie par

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{\Re(s) \geq 0} |f(s)| = \sup_{\omega \geq 0} |f(i\omega)|.$$

(Dans le cas où $f \in \mathcal{RH}_{\infty}^{p \times m}$, la définition de $\|f\|_{\infty}$ s'obtient à partir de l'expression ci-dessus en remplaçant $|f(s)|$ par $\bar{\sigma}(f(s))$.) La marge de module est donnée par

$$Mm = \inf_{\omega \geq 0} |1 + L(i\omega)| = \frac{1}{\|S_i\|_{\infty}} \quad (13)$$

On peut considérer que la marge de module est correcte si elle est au moins égale à 0,5. On définit également à partir du lieu de Nyquist (ou du diagramme de Bode) de $L(s)$ la marge de gain Mg et la marge de phase Mp ; Mg (resp. Mp) est la réunion de tous les intervalles ouverts I de $\mathcal{R}$ tels que $1 \in I$ (resp. $0 \in I$) et pour tout $g \in I$ (resp. pour tout $\varphi \in I$) $1 + gL(s)$ (resp. $1 + e^{-i\varphi}L(s)$) a tous ses zéros dans le demi-plan gauche (autrement dit, ce sont, respectivement, les gains et les déphasages qui, s'introduisant à un endroit de la boucle, ne provoquent pas d'instabilité). Les bornes des marges de gain et de phase sont souvent exprimées, respectivement, en décibels et en degrés. On peut donner des minorants de ces marges à partir de la marge de module :

$$Mg \supset \left] \frac{1}{1+Mm}, \frac{1}{1-Mm} \right[, \quad Mp \supset \left] -2 \arcsin \frac{Mm}{2}, 2 \arcsin \frac{Mm}{2} \right[\quad (14)$$

Supposons maintenant que le système à commander *réel* $\tilde{\mathbf{P}}$ soit linéaire, stationnaire et minimal, ayant pour fonction de transfert $\tilde{P}(s)$, et que cette dernière soit liée à la fonction de transfert $P(s)$ du modèle dont on dispose par la relation

$$\tilde{P}(s) = P(s)(1 + E(s))$$

où « l'erreur multiplicative » $E(s)$, qui représente les dynamiques négligées, est telle que (i) $\tilde{P}(s)$ est strictement propre, n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire et a n_P pôles dans le demi-plan droit, (ii) il existe une fonction de transfert $W_1(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$ telle que $|E(i\omega)W_1(i\omega)| < 1$ pour tout $\omega \geq 0$. En supposant que $\mathbf{K}$ stabilise $\mathbf{P}$, on montre que $\mathbf{K}$ stabilise $\tilde{\mathbf{P}}$ pour toutes les erreurs multiplicatives vérifiant les propriétés (i) et (ii) ci-dessus si, et seulement si

$$\|W_1(1 - S_i)\|_{\infty} \leq 1 \quad (15)$$

Généralement, l'erreur multiplicative est importante essentiellement dans les hautes fréquences (cf. *supra*), donc $|W_1(i\omega)|$ a de petites valeurs pour ω petit (basses fréquences) et de grandes valeurs pour ω grand (hautes fréquences). La condition (15) ne peut donc être satisfaite que si le « gain de boucle » $|L(i\omega)|$ est suffisamment petit dans les hautes fréquences puisque $1 - S_i = L/(1 + L)$.

L'asservissement de la figure 3 n'est efficace que si l'erreur $e = y - r$ est faible en régime permanent ou même après une période transitoire aussi brève que possible dès lors que les perturbations et la référence sont des constantes (ou du moins des signaux lentement variables). On montre que la fonction de transfert reliant en boucle fermée d_y et $-r$ à e est $S_i(s)$. Du point de vue des performances, il est donc essentiel que $|S_i(i\omega)|$ soit suffisamment petit dans les basses fréquences. Soit une fonction de transfert $W_2(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$ telle que

$$\|W_2 S_i\|_{\infty} \leq 1 \quad (16)$$

Cette fonction de transfert $W_2(s)$ ayant été judicieusement choisie, la performance sera jugée satisfaisante si la condition (16) est vérifiée ; une telle fonction de transfert a pour propriété que $|W_2(i\omega)|$ a de grandes valeurs dans les basses fréquences et de petites valeurs dans les hautes fréquences, et la condition (16) ne peut donc être satisfaite que si le gain de boucle $|L(i\omega)|$ est suffisamment grand dans les hautes fréquences.

Les relations (13), (15) et (16) montrent l'importance de la fonction de sensibilité et de la « norme $\mathcal{H}_\infty$ » pour l'analyse du compromis robustesse/performance. Résumons les termes de ce compromis : pour satisfaire (16), la boucle ouverte doit avoir un grand gain dans les basses fréquences, ce qu'on obtient par exemple en choisissant un régulateur ayant un pôle à zéro (ce qui lui confère un « terme intégral ») ; pour satisfaire (15), elle doit avoir un gain décroissant en fonction de ω avec une pente suffisamment forte (pente qu'on appelle la « dégringolade », en anglais « roll-off ») dans les hautes fréquences ; enfin, pour que la marge de module donnée par (13) soit suffisante, la dégringolade de la boucle ouverte ne doit pas être trop forte au voisinage de $|L(i\omega)|=1$ (soit 0 dB), cette dernière condition étant impliquée par la « relation amplitude-phase de Bode » que nous ne détaillerons pas ici. D'autre part, on appelle « pulsation de coupure » la quantité

$$\omega_c = \max\{\omega \geq 0 : |L(i\omega)| = 1\}.$$

Elle détermine dans une large mesure la rapidité du système bouclé. Du point de vue des performances, on la souhaite aussi élevée que possible, mais la contrainte de robustesse (15) lui impose une valeur suffisamment basse.

Si le système $\mathbf{P}$ de la figure 3 est *multivariable*, on est amené à distinguer la matrice de transfert de la boucle ouverte (resp. la matrice de sensibilité) *en entrée* de $\mathbf{P}$, définie par $L_i = K P$ (resp. $S_i = (I + L_i)^{-1}$), de celle *en sortie* de $\mathbf{P}$, définie par $L_o = P K$ (resp. $S_o = (I + L_o)^{-1}$). La relation (13) définit la marge de module *en entrée* de $\mathbf{P}$ (notée Mm_i dans le cas multivariable) mais en changeant l'indice i (« input ») par l'indice o (« output »), on obtient la définition de la marge de module *en sortie* de $\mathbf{P}$ (notée Mm_o). Les relations (14) restent valides dès lors qu'on distingue les marges de gain et de phase *en entrée* de $\mathbf{P}$ de celles *en sortie* de ce système.

Asservissements monovariabiles

Abordons maintenant le problème qui consiste à concevoir un régulateur ayant une structure telle que le compromis robustesse/performance qui vient d'être mis en évidence puisse être correctement géré.

Le type de régulateur actuellement encore le plus répandu dans l'industrie est le régulateur « proportionnel, intégral et dérivé » (P.I.D.) dont la fonction de transfert est de la forme

$$K(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right).$$

Le coefficient $k > 0$ est le gain, $T_i > 0$ et $T_d \geq 0$ sont les constantes de temps du terme intégral et du terme dérivé respectivement, et $N \geq 1$ est un coefficient de filtrage de la dérivée (cette dernière étant d'autant moins filtrée que N est plus grand). Le terme intégral permet d'assurer un grand gain dans les basses fréquences, ce qui permet le rejet de perturbations et un suivi précis de la référence ; le terme dérivé permet de diminuer la dégringolade de la boucle ouverte au voisinage de la pulsation de coupure ; cette dernière résulte de l'effet des trois termes. La fonction de transfert $K(s)$ est bipropre (c'est-à-dire propre et à inverse propre), ce qui rend ce type de régulateur peu robuste vis-à-vis de dynamiques négligées dans les hautes fréquences.

Il est également possible de concevoir un régulateur par placement de pôles. Comme il a été mentionné plus haut, les pôles du système bouclé Σ sont les racines du polynôme $A_{bf} = AS + BR$. La méthode du placement de pôles consiste à se donner A_{bf} et à déterminer R et S de manière que cette égalité soit vérifiée. Si l'on souhaite que le régulateur ait un terme intégral, $S(s)$ est choisi de la forme $S(s) = s S_I(s)$ et l'équation du placement de pôles devient

$$A_I(s)S_I(s) + B(s)R(s) = A_{bf}(s) \quad (17)$$

où $A_I(s) = A(s)s$. L'équation (17) est une équation de Bézout, qui admet toujours une solution quel que soit le second membre A_{bf} si, et seulement si les polynômes A_I et B sont premiers entre eux, c'est-à-dire si $B(s)$ n'a pas de racine nulle (autrement dit si le système $\mathbf{P}$ n'est pas dérivateur). Parmi ces solutions, il y en a une seule telle que $d^\circ(R) \leq d^\circ(A)$. Pour imposer à la fonction de transfert $K(s)$ un « degré relatif » $\delta_0 \geq 0$ (défini par $\delta_0 = d^\circ(S) - d^\circ(R)$), il suffit de choisir au second membre un polynôme A_{bf} de degré $2n + \delta_0$, où $n = d^\circ(A)$. L'entier δ_0 permet de maîtriser complètement la dégringolade de la boucle ouverte dans les hautes fréquences. Reste que les racines de A_{bf} doivent être judicieusement choisies de manière que la marge de module et la

pulsation de coupure soient celles souhaitées. Ce point, qui ne peut être détaillé ici, peut être traité de manière systématique.

Asservissements multivariables

Supposons maintenant qu'on ait à asservir un système $\mathbf{P}$ ayant m entrées et p sorties. Le formalisme ci-dessus se généralise malaisément à ce cas, et il est préférable d'utiliser la représentation d'état ; le système $\mathbf{P}$ est supposé strictement propre et décrit par le modèle d'état (9) où $\mathbf{D} = 0$.

Considérons tout d'abord le cas où toutes les composantes de l'état x sont mesurées à chaque instant. On peut alors mettre en œuvre une *commande à retour d'état*, de la forme $u = v - \mathbf{K}x$, où v est un signal auxiliaire, provenant de la référence. Le système en boucle fermée est donc régi par l'équation

$$\dot{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x + \mathbf{B}v$$

de sorte que le bouclage a pour effet de modifier la matrice d'état : en boucle ouverte, celle-ci est $\mathbf{A}$; en boucle fermée, elle devient $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Soit $\wp$ un ensemble de n nombres complexes ; cet ensemble est dit *symétrique* si pour tout élément $z \in \wp$, on a $\bar{z} \in \wp$ (où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z). Un des théorèmes fondamentaux de l'automatique est le suivant : pour tout ensemble symétrique $\wp$ de n nombres complexes, il existe une « matrice de gains » $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ ait toutes ses valeurs propres dans $\wp$, si, et seulement si $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est commandable. Avec un léger abus de langage, on dira donc que la commandabilité est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse placer *arbitrairement* les pôles du système par retour d'état. Bien entendu, pour la stabilité, on placera les pôles dans le demi-plan gauche ouvert s'il s'agit d'un système à temps continu et dans le disque unité ouvert s'il s'agit d'un système à temps discret.

Le gros inconvénient d'une telle loi de commande est qu'elle ne possède pas de terme intégral, contrairement par exemple à une commande de type P.I.D. Aussi est-il nécessaire d'effectuer en pratique des augmentations de modèle. Supposons que la variable à régler soit le vecteur $y = \mathbf{C}x$ (ayant p composantes) et soit $e = y - r$ l'erreur de régulation. Le but est maintenant de déterminer une loi de commande qui soit telle que la propriété (P) ci-après soit vérifiée.

(P) : Les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ étant entachées d'incertitudes $\Delta\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{B}$ et $\Delta\mathbf{C}$ suffisamment petites, et des perturbations constantes inconnues affectant le système $\mathbf{P}$, pour toute référence constante $r \in \mathbb{R}^p$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = cte, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = cte.$$

Supposons que le système $\mathbf{P}$ ait une matrice de transfert $G(\sigma)$ de rang plein sur $\mathbb{R}(\sigma)$ (c'est-à-dire $\text{rang}_{\mathbb{R}(\sigma)} G(\sigma) = \min(m, p)$, hypothèse qui n'est nullement restrictive) et plaçons-nous pour fixer les idées dans le cas où $\mathbf{P}$ est un système à temps continu (ce qui entraîne $\nabla = \partial$). On a $e = \mathbf{C}x - r$. Dérivons cette équation

ainsi que l'équation d'état (9) et posons $X = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix}$. On obtient $\dot{X} = \mathbf{F}X + \mathbf{G}\dot{u}$ avec $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$.

On montre que $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est commandable si et seulement si (i) $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est commandable, (ii) $m \geq p$ et (iii) $\mathbf{P}$ n'a pas de zéro invariant à $s = 0$. Avec la commande à retour d'état

$$\dot{u} = -\mathbf{K}X. \quad (18)$$

on obtient comme système bouclé $\dot{X} = (\mathbf{F} - \mathbf{GK})X$. La commandabilité de $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir placer arbitrairement les pôles de ce système (c'est-à-dire les valeurs propres de $\mathbf{F} - \mathbf{GK}$) par choix de $\mathbf{K}$. Ces pôles étant placés dans le demi-plan gauche ouvert, on montre facilement que la propriété (P) cherchée est vérifiée. L'interprétation de la condition (i) est évidente ; la condition (ii) signifie que le nombre commandes linéairement indépendantes permettant d'agir sur le système doit être au moins égal au nombre de variables à régler linéairement indépendantes, autrement dit que le *nombre de degrés de liberté* soit être suffisant ; la condition (iii) signifie que, par abus de langage, le système $\mathbf{P}$ ne doit pas être dérivateur (cette condition a déjà été rencontrée dans le cadre des asservissements monovariabiles). En écrivant la matrice de gains $\mathbf{K}$ sous la forme $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_i \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et en intégrant (18), on obtient la loi de commande (définie à une constante près)

$$u = -\mathbf{K}_p x - \mathbf{K}_i \int e dt, \quad (19)$$

dite « commande par retour d'état et bouclage intégral ».

Pour mettre en œuvre la loi de commande (19), il est nécessaire que toutes les composantes de l'état soient mesurées à chaque instant. Cette circonstance peut se produire mais n'est pas, tant s'en faut, la plus fréquente. Dans le cas général, en effet, on ne mesure que certaines combinaisons linéaires de ces composantes, qui constituent un vecteur z . Pour simplifier les notations, supposons que $z = y$. En utilisant ce vecteur de mesures et le modèle d'état (9), on peut concevoir un observateur d'état, fournissant à chaque instant un *état estimé* $\hat{x}$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = 0$ où $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est l'erreur d'estimation. Voici comment. L'observateur d'état est choisi de la forme

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A} \hat{x} + \mathbf{B} u + \tilde{\mathbf{K}} (y - \mathbf{C} \hat{x}). \quad (20)$$

Si l'on faisait $\tilde{\mathbf{K}} = 0$ dans (20), on obtiendrait une simple simulation du système $\mathbf{P}$; cette simulation ne pourrait fournir une estimée exacte de x que si $\hat{x}$ était initialisé à la bonne valeur, si le modèle était exact et si $\mathbf{P}$ était un système stable. D'où la nécessité d'ajouter un « terme de correction » $\tilde{\mathbf{K}}(y - \mathbf{C} \hat{x}) = \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C} \tilde{x}$; la matrice $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est appelée la *matrice de gains de l'observateur*. En retranchant (20) de la première égalité de (9) on obtient

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}) \tilde{x}.$$

Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = 0$ quelles que soient les conditions initiales si, et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}$ appartiennent au demi-plan gauche ouvert. Ces valeurs propres sont celles de $(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}}^T$. D'après ce qui précède, on peut placer arbitrairement les valeurs propres de $\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}}^T$ par choix du gain $\tilde{\mathbf{K}}$ si, et seulement si $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ est commandable, c'est-à-dire si $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ est observable.

Par choix de $\tilde{\mathbf{K}}$ et de $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_p \quad \mathbf{K}_i]$, plaçons les valeurs propres de $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}$ (qui sont les *pôles de l'observateur*) et les valeurs propres de $\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}$ dans le demi-plan gauche ouvert. Alors la loi de commande (19), où x est remplacé par son estimée $\hat{x}$, est telle que la propriété (P) est satisfaite.

Commande robuste

Grâce à leur bouclage intégral, les lois de commande déterminées ci-dessus ont une forme de robustesse, dite « structurelle », qui est purement qualitative dans la mesure où l'on ne peut rien préciser sur la taille des *incertitudes permises* $\Delta \mathbf{A}$, $\Delta \mathbf{B}$ et $\Delta \mathbf{C}$ de la propriété (P). Cette taille, qui peut être très petite, dépend des gains $\mathbf{K}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$; dans le cas monovarié, ces gains sont déterminés par les valeurs propres de $\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}$ et de $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}$, mais ce n'est plus vrai dans le cas multivarié.

En supposant que toutes les composantes de l'état soient mesurées, soit une loi de commande de la forme (19), minimisant un critère quadratique tel que

$$J = \int_0^{+\infty} e^{2\alpha t} \left(X^T(t) \mathbf{E}^T \mathbf{E} X(t) + \|\dot{u}(t)\|^2 \right) dt$$

où $\alpha \geq 0$ et où $\mathbf{E}$ est une matrice telle que $(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ est observable (cette dernière hypothèse, un peu restrictive, est prise pour simplifier l'exposé); $\mathbf{Q} = \mathbf{E}^T \mathbf{E}$ est appelée la *matrice de pondération de l'état*. Avec une telle loi de commande, on montre que

$$\|S_i\|_{\infty} = 1. \quad (21)$$

D'après (13), la marge de module en entrée de $\mathbf{P}$ est donc $Mm_i = 1$ et d'après (14) on obtient $Mg_i \supset]1/2, +\infty[$, $Mp_i \supset]-60^\circ, +60^\circ[$. Ces garanties de robustesse, bien utiles, deviennent pertinentes si, de plus, la *rapidité du système bouclé* est correctement ajustée grâce à un choix approprié du paramètre α et de la matrice symétrique

semi-définie positive $\mathbf{Q}$. Ce choix est facilité en prenant pour $\mathbf{Q}$ une matrice diagonale ; on peut aussi remplacer $\mathbf{Q}$ par $\varepsilon \mathbf{Q}$, $\varepsilon > 0$, et faire tendre ε vers 0^+ , le seul paramètre de synthèse restant alors α .

Dans le cas où l'état doit être estimé par un observateur tel que (20), la propriété (21) est perdue. Toutefois, si le système $\mathbf{P}$ est à déphasage minimal, il est possible de retrouver asymptotiquement cette propriété grâce à un observateur à grand gain d'un type particulier (méthode dite « LTR », de l'anglais « Loop Transfer Recovery »).

La méthode qui vient d'être brièvement exposée est de nature temporelle. D'autres approches pour réaliser des commandes robustes sont fréquentielles, et parmi celles-ci il convient de mentionner tout particulièrement celles fondées sur la minimisation d'une norme $\mathcal{H}_\infty$. Pour simplifier l'exposé, supposons que $\mathbf{P}$ soit un système monovarié. Pour que les inégalités (15) et (16) soient vérifiées, il suffit que

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 (1 - S_i) \\ W_2 S_i \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1. \quad (22)$$

On appelle *problème de sensibilité mixte* celui qui consiste à déterminer un régulateur pour lequel l'inégalité (22) est vérifiée (les « fonctions de pondération » W_1 et W_2 étant les paramètres de réglage). Il existe des algorithmes fiables pour résoudre ce problème *quand il admet une solution*. Toutefois, la loi de commande ainsi obtenue présente de graves inconvénients, notamment lorsque $\mathbf{P}$ a des pôles ou des zéros proches de l'axe imaginaire. Le régulateur solution du problème de sensibilité mixte est en effet tel que ces pôles ou ces zéros sont simplifiés dans la fonction de transfert de la boucle ouverte $L(s)$; ils se retrouvent alors dans la fonction de transfert reliant la perturbation d_u à la sortie y ou dans celle reliant la référence r à la commande u (voir figure 3). Pour obtenir une loi de commande effectivement robuste, il convient donc de résoudre un « problème $\mathcal{H}_\infty$ » plus complexe que celui de la sensibilité mixte, mettant notamment en jeu les fonctions de transfert $K(s)S_i(s)$ et $P(s)S_i(s)$. Cela augmente bien entendu le nombre de fonctions de pondération et la difficulté de leur choix. Quelle que soit la méthode retenue pour concevoir une commande robuste, un certain nombre d'essais-erreurs sont nécessaires pour choisir correctement les paramètres de synthèse.

4. Identification

Il existe de nombreuses approches pour identifier un système, dont l'une des plus pertinentes est l'identification paramétrique. C'est à celle-ci que nous limiterons le bref exposé qui suit. Les systèmes considérés sont linéaires stationnaires à temps discret. Ils sont supposés être des *filtres causaux et stables*, représentés par leur « fonction de transfert » $F(q^{-1})$ (où q^{-1} est l'opérateur de retard), qui est à interpréter ici comme l'opérateur de convolution associé. Considérons le modèle $\mathcal{M}$ défini par

$$y(t) = G(q^{-1}, \theta)u(t) + H(q^{-1}, \theta)w(t) \quad (23)$$

où le vecteur de paramètres θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{R}^N$ et w est un bruit blanc à temps discret (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et centrées, de variance $E[w(t)^2] = \sigma^2$: cf. calcul des PROBABILITES) ; on suppose que le filtre $G(q^{-1}, \theta)$ est strictement causal, que $H(q^{-1}, \theta)$ est bicausal, bistable et vérifiant $H(0, \theta) = 1$ (ceci sans perte de généralité grâce au « théorème de factorisation spectrale causale directe et inverse ») et que $w(t)$ est indépendant de θ et des entrées $u(\tau)$ (cette dernière hypothèse excluant le cas où l'on identifie un système en boucle fermée) ; G et H sont des fractions rationnelles. Soit le système à identifier Σ ayant pour équation

$$y(t) = \tilde{G}(q^{-1})u(t) + \tilde{H}(q^{-1})w(t)$$

où $\tilde{H}(0) = 1$. Ce système est dit *identifiable* à l'aide du modèle $\mathcal{M}$ s'il existe une *valeur unique* $\tilde{\theta}$ de θ telle que $G(q^{-1}, \tilde{\theta}) = \tilde{G}(q^{-1})$ et $H(q^{-1}, \tilde{\theta}) = \tilde{H}(q^{-1})$.

Soit $\mathcal{F}_{t-1}$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $y(t-i)$, $u(t-i)$, $i \geq 1$ et soit la *prédiction optimale* $\hat{y}(t|t-1) = E[y(t)|\mathcal{F}_{t-1}, \theta]$. Intuitivement, il s'agit de la meilleure prédiction que l'on puisse faire à l'instant t de

$y(t)$ sur la base du modèle $\mathcal{M}$, connaissant uniquement les entrées et les sorties *passées*, et sous l'hypothèse que le paramètre a pour valeur θ . On montre que

$$\hat{y}(t|t-1) = \left[1 - \frac{1}{H(q^{-1}, \theta)} \right] y(t) + \frac{G(q^{-1}, \theta)}{H(q^{-1}, \theta)} u(t). \quad (24)$$

La méthode d'identification consiste à minimiser

$$J_t(\theta) = \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t (y(\tau) - \hat{y}(\tau|t-1))^2.$$

Dans le cas général, cette minimisation peut être réalisée grâce à une méthode de descente (par exemple la méthode de Levenberg-Marquardt). Toutefois, si $G = B/A$ et $H = 1/A$ où $A = A(q^{-1}, \theta)$ et $B = B(q^{-1}, \theta)$ sont des polynômes en q^{-1} dont les coefficients sont les composantes de θ , l'expression (24) devient

$$\hat{y}(t|t-1) = (1 - A(q^{-1}, \theta))y(t) + B(q^{-1}, \theta)u(t), \quad (25)$$

dont le second membre est linéaire par rapport à θ , de la forme $\phi^T(t-1)\theta$; l'expression (25) est appelée une *régression linéaire* et le modèle $\mathcal{M}$ défini par (23) est dit de type « ARX ». Dans ce cas, la minimisation de $J_t(\theta)$ est le « problème des moindres carrés » dont la solution est le résultat d'un calcul explicite qui peut être mis sous forme récursive.

Soit $\hat{\theta}(t)$ la valeur de θ pour laquelle le critère $J_t(\theta)$ est minimum (en supposant que cette valeur existe et soit unique). Supposons le système Σ identifiable à l'aide du modèle $\mathcal{M}$ et soit $\bar{\theta}$ la « vraie valeur » du paramètre. L'estimateur $\hat{\theta}(t)$ est dit *consistant* si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\theta}(t) = \bar{\theta}$ presque sûrement. On montre que si $\sigma > 0$ et si u est un *signal à excitation persistante*, c'est-à-dire ayant une densité spectrale φ_{uu} (cf. théorie du SIGNAL) vérifiant $\varphi_{uu}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in [-\pi, \pi]$, alors l'existence et l'unicité de $\hat{\theta}(t)$ est assurée, ainsi que la *consistance* de cet estimateur.

Hisham ABOU-KANDIL
et Henri BOURLES

Bibliographie

- H. Bourlès, *Systèmes linéaires – De la modélisation à la commande*, Hermès-Lavoisier, 2006.
D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, G. Ferreres, *Robustesse et commande optimale*, Cépaduès-Éditions, 1999.

Corrélat

AUTOMATISATION, CYBERNETIQUE, équations DIFFÉRENTIELLES, algèbre LINEAIRE ET MULTILINEAIRE, algèbres NORMEES, OPTIMISATION ET CONTROLE, calcul des PROBABILITES, théorie du SIGNAL, théorie SPECTRALE, calcul SYMBOLIQUE, SYSTEMES DYNAMIQUES DIFFÉRENTIABLES