
Structure des systèmes linéaires

Henri Bourlès

CNAM/ENS-Cachan.

e-mail: henri.bourles@satie.ens-cachan.fr; henri.bourles@cnam.fr

MR2 ATSI 2014–2015

Références

H. Boursès, **Linear Systems** , ISTE-Wiley, 2010.

H. Boursès, B. Marinescu, **Linear Time-Varying Systems** , Springer, 2011.

0. Introduction

Représentations d'un système

Quelle est la représentation la plus pertinente?

Fonction de transfert?

Représentation d'état?

Représentation de Rosenbrock?

Caractéristiques d'un système

Exemples:

1. Commandabilité

Est-ce le système qui est commandable?

Ou une représentation du système?

2. Stabilité

Mêmes questions

Réponses:

1. C'est **le système** qui est commandable, stable, etc.
2. Il faut des représentations suffisamment **complètes**.
Exemple: la commandabilité d'une fonction de transfert n'a aucun sens.
3. Il faut trouver des **formulations intrinsèques** des caractéristiques des systèmes.

Quelles sont les descriptions intrinsèques?

1. La "**Behavioral approach**" (Willems, 1986): l'accent est mis sur les *solutions*.
2. La **Théorie des D-modules** (Fliess, 1990): un système, c'est un module sur un anneau d'opérateurs: l'accent est mis sur les **équations**.
3. En mathématiques: les précurseurs sont Grothendieck (Géométrie algébrique, 1960) et surtout Malgrange (1962-1963).
4. Cadre général: *l'analyse algébrique* (Sato, Kashiwara, 1970,...)

Plan du cours

1. Opérateurs différentiels
2. **D**-modules et solutions
3. Éléments d'algèbre homologique et d'analyse algébrique
4. Commandabilité et observabilité
5. Modules sur les anneaux principaux
6. Pôles et zéros
7. Structure à l'infini

1. Opérateurs différentiels

1.1. Corps et espaces vectoriels

\mathbf{K} un corps, E un \mathbf{K} -espace-vectoriel à gauche.

Soit l'équation

$$\lambda x = 0, \quad \lambda \in \mathbf{K}^\times, \quad x \in E.$$

Alors

$$1/\lambda \in \mathbf{K},$$

par conséquent

$$(1/\lambda) \lambda x = 0 \implies x = 0.$$

1.2. Anneaux et modules

\mathbf{A} un anneau, M un \mathbf{A} -module à gauche.

Soit l'équation

$$\lambda x = 0, \quad \lambda \in \mathbf{A}^\times, \quad x \in M.$$

Si λ n'est pas inversible, on ne peut pas en déduire $x = 0$.

Exemple:

$\mathbf{A} = \mathbb{C}[\partial], \quad \partial = d/dt.$

$$\lambda x = 0 \iff \frac{dx}{dt} = 0 \not\Rightarrow x = 0.$$

1.3. Compléments sur les anneaux

Notion d'anneau

1. \mathbf{A} un anneau: ensemble muni
2. d'une addition. Chaque élément $\lambda \in \mathbf{A}$ a un **opposé** $-\lambda \in \mathbf{A}$ tel que $\lambda + (-\lambda) = 0$.
Groupe abélien: l'addition est commutative: $\lambda + \mu = \mu + \lambda$.
3. d'une multiplication $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda\mu$. Distributivité par rapport à l'addition.

Anneau intègre (= domaine):

Tel que $\lambda\mu = 0 \implies \lambda = 0$ ou $\mu = 0$.

Anneau commutatif:

Tel que $\lambda\mu = \mu\lambda$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{A}$.

Unité dans un anneau:

Élément v qui est inversible: $\exists v^{-1} : vv^{-1} = v^{-1}v = \mathbf{1}$.

Exemples

1. L'anneau des matrices $M_2(\mathbb{C})$ n'est pas intègre, car

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $M_2(\mathbb{C})$ n'est pas commutatif, car

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Unité dans $M_2(\mathbb{C})$: élément de $GL_2(\mathbb{C})$.

Idéal dans un anneau

1. Idéal à gauche \mathfrak{J} : sous-groupe abélien de \mathbf{A} tel que $\mathbf{A}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$.
2. Idéal à droite \mathfrak{J} : sous-groupe abélien de \mathbf{A} tel que $\mathfrak{J}\mathbf{A} = \mathfrak{J}$.
3. Idéal bilatère (= idéal): idéal à gauche qui est un idéal à droite.
4. Idéal (à gauche, à droite ou bilatère) propre: $\neq \mathbf{A}$.

Ensemble générateur d'un idéal

1. $G \subset \mathbf{A}$. L'idéal à gauche \mathfrak{J} engendré par G est le plus petit idéal à gauche contenant G .
2. Si G est *fini*: \mathfrak{J} est dit *de type fini*.
3. Si $G = \{a\}$: \mathfrak{J} est *l'idéal principal à gauche engendré par a* :

$$\mathfrak{J} = \mathbf{A}a.$$

Éléments associés

$a, b \in \mathbf{A}$ sont **associés à gauche** si

$$(\exists \text{ unité } v : a = vb) \iff \mathbf{A}a = \mathbf{A}b$$

$a, b \in \mathbf{A}$ sont **associés à droite** si

$$(\exists \text{ unité } v' : a = bv') \iff a\mathbf{A} = b\mathbf{A}$$

$a, b \in \mathbf{A}$ sont **associés** si

$$(\exists \text{ unités } v, v' : a = vbv') \iff \mathbf{A}a\mathbf{A} = \mathbf{A}b\mathbf{A}$$

Quelques types d'anneaux

1. Anneau *principal* à gauche:
= Anneau intègre \mathbf{A} tel que tout idéal à gauche est *principal*.
2. Anneau *de Bézout* à gauche:
= Anneau intègre \mathbf{A} tel que tout idéal à gauche de *type fini* est *principal*.
3. Anneau *noethérien* à gauche:
= Anneau \mathbf{A} tel que tout idéal à gauche est de *type fini*.

4. Anneau **principal**:

= Anneau principal à gauche qui est principal à droite. (Idem pour les autres types d'anneau.)

5. Anneau **euclidien à gauche**:

= Anneau intègre \mathbf{A} muni d'une **fonction euclidienne à gauche** .

Fonctions euclidiennes

Soit \mathbf{A} un anneau intègre.

- Fonction **euclidienne à gauche**:

= fonction $\theta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ telle que:

1. $\theta(0) = -\infty,$

2. $\theta(ab) \geq \theta(a) > -\infty$ si $a, b \in \mathbf{A}^\times$

3. Pour tout $a \in \mathbf{A}$ et tout $b \in \mathbf{A}^\times$, il existe $q, r \in \mathbf{A}$ tels que

$$a = qb + r, \quad \theta(r) < \theta(b)$$

(division euclidienne de a par b à droite).

- Fonction **fortement euclidienne** à gauche:

Idem avec (2) changée par (2'):

$$\theta(a - b) \leq \max\{\theta(a), \theta(b)\}, \quad \theta(ab) = \theta(a) + \theta(b)$$

si $a, b \in \mathbf{A}^\times$.

- Fonction **euclidienne à droite** : idem en interchangeant q et b dans (3)
(division euclidienne de a par b à gauche).

Exemples

1. Anneau \mathbb{Z} , $\theta(a) = |a|$.

θ = fonction euclidienne, mais **pas fortement** car $\theta(a - b) \not\leq \max\{\theta(a), \theta(b)\}$.

2. Anneau $\mathbf{K}[X]$, \mathbf{K} = corps commutatif, $\theta(f(X)) = d^\circ(f(X))$.

θ = fonction **fortement euclidienne**.

Théorème 1 (1) *Le reste r de la division euclidienne (3) est unique si, et seulement si θ est fortement euclidienne.*

(2) *Un anneau euclidien à gauche est principal à gauche.*

Illustration de (1):

Dans \mathbb{Z} , division Euclidienne de 7 par 2 :

$$7 = 2 \times 3 + 1 = 2 \times 4 - 1.$$

Démonstration de (2):

Soit \mathfrak{a} un idéal à gauche, $0 \neq b \in \mathfrak{a}$ tel que $\theta(b)$ est minimum parmi les entiers.

Soit $0 \neq a \in \mathfrak{a}$ et faisons la division euclidienne à droite de a par b :

$$a = qb + r, \quad \theta(r) < \theta(b)$$

donc $\theta(r) = -\infty$, donc $r = 0$, donc $a = qb \in \mathbf{A}b$.

Donc

$$\boxed{\mathfrak{a} = \mathbf{A}b}.$$

1.4. Corps de fractions

Cas commutatif

Si \mathbf{A} est un anneau *intègre commutatif*, il admet un corps de fractions \mathbf{K} .

Tout élément de \mathbf{K} s'écrit sous la forme b/a , $a, b \in \mathbf{A}$, $a \neq 0$.

Cas non commutatif

On distingue les fractions à gauche $a^{-1}b$ des fractions à droite ba^{-1} .

Définition 2 Un anneau intègre A est *d'Ore à gauche* si on peut réduire un nombre fini de fractions à gauche

$$a_1^{-1}b_1, \dots, a_n^{-1}b_n \quad (a_i \neq 0)$$

au même dénominateur.

Théorème 3 Un A anneau admet un *corps de fractions à gauche* \mathbf{K} si, et seulement si A est *d'Ore à gauche*.

Pour un anneau *intègre*,



Tout élément de \mathbf{K} s'écrit sous la forme $a^{-1}b$, $a, b \in \mathbf{A}$, $a \neq 0$.

Si \mathbf{A} est *d'Ore (à gauche et à droite)*, son corps de fractions à gauche et son corps de fractions à droite *coïncident*: tout élément de \mathbf{K} s'écrit sous la forme

$$a^{-1}b = b'a'^{-1},$$

$$a, a', b, b' \in \mathbf{A}, \quad a, a' \neq 0.$$

Idéaux inversibles

(1) Cas commutatif

Soit \mathfrak{a} un idéal de l'anneau commutatif \mathbf{A} . \mathfrak{a} est inversible s'il existe un idéal fractionnaire \mathfrak{q} tel que

$$\mathfrak{a}\mathfrak{q} = \mathbf{A}.$$

(a) Définition d'un idéal fractionnaire:

$\mathfrak{q} \subset \mathbf{K}$ est un \mathbf{A} -module pour lequel il existe $d \in \mathbf{A}^\times$ tel que $d\mathfrak{q} \subset \mathbf{A}$.

(b) Définition de $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{q} = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_i q_i; a_i \in \mathbf{A}, q_i \in \mathfrak{q} \right\}.$$

(2) Extension au cas non commutatif (Gentile, 1960)

Soit \mathfrak{a} un idéal à gauche dans un anneau d'Ore à gauche; \mathfrak{a} est *invertible* s'il existe

$$\begin{aligned} q_1, \dots, q_n &\in \mathbf{K}, \\ a_1, \dots, a_n &\in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}q_i &\subset \mathbf{A}, \\ \sum_{i=1}^n q_i a_i &= 1. \end{aligned}$$

Lemme 4 *Si $\alpha \neq 0$ est un idéal principal à gauche dans un anneau d'Ore à gauche, il est inversible.*

Démonstration. Si $\alpha = \mathbf{A}a_1$, $q_1 = a_1^{-1}$ est tel que $\alpha q_1 = \mathbf{A}a_1a_1^{-1} = \mathbf{A}$ et $q_1a_1 = a_1^{-1}a_1 = 1$. ■

1.5. Anneaux de Dedekind et anneaux factoriels commutatifs

Anneaux de Dedekind

Un anneau de Dedekind à gauche est un anneau d'Ore à gauche dont tous les idéaux à gauche sont inversibles.

Théorème 5 (1) *Un anneau principal est un anneau de Dedekind.*

(2) *Dans un anneau de Dedekind, tout idéal à gauche est engendré par 2 éléments (de même pour tout idéal à droite). Un anneau de Dedekind est donc noethérien.*

Anneaux factoriels commutatifs

Dans un anneau \mathbf{A} , un élément $p \neq 0$ est *extrémal* (ou est *un atome*) s'il est non inversible et

$$ab = p \implies p \text{ est associé à } a \text{ ou à } b.$$

Un anneau intègre commutatif est *factoriel* si tout élément $\neq 0$ admet une *décomposition unique en atomes*: il existe un système représentatif d'atomes $(p_i)_{i \in I}$ tel que tout $a \neq 0$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = v \prod_{i \in J} p_i^{n_i}, \quad J \text{ fini}$$

où v est une unité.

Éléments premiers

Dans un anneau intègre \mathbf{A} , un élément $p \neq 0$ est **invariant** si

$$\mathbf{A}p = p\mathbf{A}.$$

Un tel élément est **premier** si

$$p \mid ab \implies p \mid a \text{ ou } p \mid b.$$

Lemme 6 *Dans un anneau intègre, tous les idéaux principaux non nuls sont engendrés par un élément invariant.*

Théorème 7 *Un élément premier est un atome. En supposant \mathbf{A} commutatif, la réciproque est vraie si, et seulement si \mathbf{A} est factoriel.*

Théorème 8 *Un anneau principal commutatif est factoriel.*

Exemple: $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas principal car

$$6 = 2 \times 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$$

sont deux décompositions de 6 en atomes.

Mais c'est un anneau de Dedekind.

Si tous les anneaux intègres étaient principaux, le dernier théorème de Fermat aurait été démontré par Lamé en 1847, au lieu de Wiles en 1995!

Anneaux simples

Un anneau \mathbf{A} est **simple** si son seul idéal (bilatère) propre est 0.

Un corps est un anneau simple.

Proposition 9 *Si un anneau intègre \mathbf{A} est simple, ses seuls éléments invariants sont les unités. La réciproque est vraie dans un anneau principal.*

Démonstration. Soit p est invariant: $p \neq 0$ et

$$\mathbf{A}p = p\mathbf{A} = p\mathbf{A}p.$$

Si \mathbf{A} est simple, $p\mathbf{A}p = \mathbf{A}$ car $p\mathbf{A}p \neq 0$. Dans un anneau principal, tous les idéaux bilatères sont de cette forme d'après le Lemme 6. ■

1.6. Anneaux d'opérateurs différentiels

Opérateurs différentiels à coefficients constants

On considère l'anneau d'opérateurs

$$\mathbf{D} = \mathbf{k} [\partial]$$

$\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et où $\partial \triangleq d/dt$

= anneau **commutatif**, fortement euclidien donc **principal**.

Soit $\mathbf{w} \in C^\infty(\Omega, \mathbf{k})$ (Ω intervalle ouvert $\neq \emptyset$ de \mathbb{R}) et $p(\partial) \in \mathbf{k}[\partial]$.

On peut former

$$p(\partial) \mathbf{w} \in C^\infty(\Omega, \mathbf{k}).$$

Théorème 10 $C^\infty(\Omega, \mathbf{k})$ est un $\mathbb{C}[\partial]$ -module.

Opérateurs différentiels à coefficients dans un anneau différentiel

\mathbf{K} = anneau commutatif différentiel (muni de la dérivée usuelle), $\mathbf{D} = \mathbf{K}[\partial]$.

Exemples:

1. $\mathbf{K} = \mathbf{k}[t]$.

Soit $w \in C^\infty(\Omega, \mathbf{k})$, $a \in \mathbf{K}$. Alors

$$\partial(a w) = \dot{a} w + a \partial w$$

(règle de Leibniz), donc

$$\boxed{\partial a - a \partial = \dot{a}} \quad (1)$$

et (1) est appelée la **règle de commutation**.

Les "indéterminées" t et ∂ ne commutent pas.

Cet anneau \mathbf{D} est **non commutatif**.

= première algèbre de Weyl $A_1(\mathbf{k})$.

-
2. $\mathbf{K} = \mathcal{O}_\Omega$, anneau des **fonctions analytiques** sur l'intervalle ouvert $\Omega \neq \emptyset$ de la droite réelle, à valeurs dans \mathbf{k} .
Cet anneau est intègre, et peut être muni de la dérivée usuelle $a \mapsto \dot{a}$.
On a de nouveau la règle de commutation (1).

Théorème 11 Soit $\mathbf{K} \supset \mathbb{Q}$ un anneau différentiel (muni de la dérivée usuelle), $\mathbf{D} = \mathbf{K}[\partial]$ (muni de la règle de commutation (1)).

(1) \mathbf{D} est un anneau d'Ore.

(2) \mathbf{D} est noethérien si, et seulement si \mathbf{K} est noethérien.

(3) Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) \mathbf{K} n'a pas d'idéal propre $\mathfrak{a} \neq 0$ tel que $\dot{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$.

(ii) \mathbf{D} est simple.

(4) Si \mathbf{K} est un anneau de Dedekind, les conditions (i), (ii) équivalent à

(iii) \mathbf{D} est un anneau de Dedekind.

Corollaire 12 (i) $A_1(\mathbf{k})$ est un anneau de Dedekind simple (non commutatif).

(ii) $\mathcal{O}_\Omega[\partial]$ est un anneau non commutatif d'Ore mais n'est ni noethérien, ni simple.

Opérateurs différentiels à coefficients dans un corps différentiel

\mathbf{K} = corps commutatif différentiel (muni de la dérivée usuelle), $\mathbf{D} = \mathbf{K}[\partial]$.

Exemples:

1. $\mathbf{K} = \mathbf{k}(t)$ = corps des fractions de $\mathbf{k}[t]$ = corps des fractions rationnelles.

On conserve la loi de commutation (1).

On écrit:

$$\mathbf{k}(t)[\partial] = B_1(\mathbf{k})$$

2. $\mathbf{K} = \mathcal{M}_\Omega$ = corps des fractions de \mathcal{O}_Ω = corps des fonctions méromorphes sur Ω .

Théorème 13 *Si \mathbf{K} n'est pas un corps de constantes, \mathbf{D} est un anneau principal non commutatif simple.*

Corollaire 14 *$B_1(\mathbf{k})$ et $\mathcal{M}_\Omega[\partial]$ ont la propriété ci-dessus.*

Problème: Sur quel(s) espace(s) fonctionnel(s) faire agir $B_1(\mathbf{k})$ ou $\mathcal{M}_\Omega[\partial]$?

1.7. Exercices

Exercice 15 *Montrer que l'anneau \mathcal{O}_Ω (Ω désignant un intervalle ouvert non vide de la droite réelle) n'est pas noethérien.*

Exercice 16 *Démontrer le lemme 6, le théorème 10 et le corollaire 12.*

Exercice 17 *Soit \mathbf{A} un anneau commutatif intègre et S un sous-ensemble multiplicatif de \mathbf{A}^\times . On considère l'ensemble des éléments de la forme a/s , $a \in \mathbf{A}$, $s \in S$.*

(i) Montrer que cet ensemble est un anneau (qu'on notera $S^{-1}\mathbf{A}$).

(ii) Soit \mathfrak{a} un idéal de \mathbf{A} . Montrer que $S^{-1}\mathfrak{a}$ (où la notation a une signification évidente) est un idéal de $S^{-1}\mathbf{A}$.

(iii) Montrer que si \mathfrak{a} est principal (resp. inversible), $S^{-1}\mathfrak{a}$ est principal (resp. inversible).

(iv) En déduire que si \mathbf{A} est un anneau principal (resp. de Dedekind), $S^{-1}\mathbf{A}$ est un anneau principal (resp. de Dedekind).

Exercice 18 Soit \mathcal{R}_Ω le plus grand anneau de fonctions rationnelles analytiques dans Ω , à savoir $\mathbb{C}(t) \cap \mathcal{O}_\Omega$.

(i) Montrer que $\mathcal{R}_\Omega = S_\Omega^{-1}\mathbb{C}[t]$ où S_Ω est l'ensemble multiplicatif des polynômes sans racines dans Ω .

(ii) Montrer que \mathcal{R}_Ω est un anneau principal commutatif et que ses éléments premiers sont les $t - \lambda$, $\lambda \in \Omega$, et leurs associés.

(iii) On considère l'anneau différentiel \mathcal{R}_Ω pour la dérivée usuelle. Montrer que $\mathcal{R}_\Omega[\partial]$ est un anneau de Dedekind non commutatif simple.

2. D-modules et solutions

2.0. Vocabulaire et notions de base

I. Morphismes:

Soit M, N deux \mathbf{A} -modules à gauche.

(a) Homomorphisme $f : M \rightarrow N$

Tel que $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ où $\lambda, \mu \in \mathbf{A}, x, y \in M$

(b) Epimorphisme $f : M \twoheadrightarrow N$

= homomorphisme surjectif: $\text{im}(f) = N$.

(c) Monomorphisme $f : M \hookrightarrow N$

= homomorphisme injectif : $\ker(f) = \{0\}$

(d) Isomorphisme $f : M \cong N$

= homomorphisme injectif et surjectif.

(e) Plongements

Soit $f : M \hookrightarrow N$ un monomorphisme. Soit $\tilde{f} : M \rightarrow \text{im}(f) := J$ tel que $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in M$.

Soit $j : J \hookrightarrow N$ l'injection canonique: $j(y) = y, \forall y \in J$.

Alors $f = j \circ \tilde{f}$ et \tilde{f} est un isomorphisme.

En identifiant M et $J = \tilde{f}(M)$, M est "plongé" dans N .

On dira: soit $f : M \hookrightarrow N$ un plongement.

II. Modules quotient:

Soit M un \mathbf{A} -module et $N \subset M$ un sous-module.

Relation d'équivalence sur M : $x \equiv x'$ si $x - x' \in N$.

Classe d'équivalence de x : $\bar{x} = x + N$ (notation).

L'ensemble des classes d'équivalence est un \mathbf{A} -module noté M/N .

Epimorphisme canonique: $\varphi : M \rightarrow M/N : x \mapsto x + N$.

$\varphi(x) = 0 \iff x \in N$: "par passage au quotient on annule les éléments de N ".

2.1. Modules de présentation finie

Equations

Soit \mathbf{D} un anneau d'opérateurs différentiels.

Soit

$$R \in \mathbf{D}^{q \times k}.$$

On s'intéresse à un système d'équations de la forme

$$\boxed{Rw = 0}. \quad (2)$$

Exemple : Système d'état

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

x : colonne de n éléments, u : colonne de m éléments, $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$,
 $B \in \mathbf{K}^{n \times m}$, \mathbf{K} = anneau différentiel (muni de la dérivée usuelle).

On écrit le système sous la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \partial I_n - A & -B \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}}_w = 0$$

sur l'anneau

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}[\partial]$$

muni de la loi de commutation (1).

2.2. Liberté et torsion

Modules libres

Soit \mathbf{A} un anneau, M un \mathbf{A} -module à gauche.

Définition 19 (1) M est *libre* s'il admet une base. Cela signifie: il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in K}$ de M telle que tout $m \in M$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$m = \sum_{i \in K} m_i \alpha_i \quad (m_i \in \mathbf{A})$$

où $m_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.

(2) M est *libre de type fini* si K est fini: $K = \{1, \dots, k\}$. Alors:

$$M \cong \mathbf{A}^{1 \times k}$$

(lignes de k éléments $\in \mathbf{A}$).

Si \mathbf{A} est un corps \mathbf{K} , M est un \mathbf{K} -espace vectoriel à gauche, et

Théorème 20 *Un \mathbf{K} -espace vectoriel à gauche est libre.*

Un \mathbf{A} -module M est dit **de type fini** s'il est engendré par un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire s'il existe un entier $r \geq 0$ et un épimorphisme

$$\varphi : \mathbf{A}^{1 \times r} \twoheadrightarrow M.$$

Soit $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ la base canonique de $\mathbf{A}^{1 \times r}$:

$$\varepsilon_i = \left(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0 \right)$$

Alors M est engendré par les $m_i = \varphi(\varepsilon_i)$.

Modules de torsion et modules sans torsion

Le théorème qui précède est faux si \mathbf{A} n'est pas un corps. Supposons \mathbf{A} intègre.

Phénomène spécifique aux modules: les éléments de torsion.

Lemme et Définition 21 (1) Un élément $m \in M$ est de torsion s'il existe $0 \neq \lambda \in \mathbf{A}$ tel que

$$\boxed{\lambda m = 0}. \quad (3)$$

(2) Si \mathbf{A} est d'Ore, l'ensemble des éléments de torsion de M est un sous-module de M , noté $\mathcal{T}(M)$.

Cas où $\mathbf{A} = \mathbf{D} = \mathbf{K}[\partial]$: $\lambda = p(\partial)$ et (3) s'écrit

$$\boxed{p(\partial) m = 0}$$

= équation différentielle homogène.

Un module M est:

- **sans torsion** si $\mathcal{T}(M) = 0$,
- **de torsion** si $M = \mathcal{T}(M)$.

Théorème 22 (1) *Un module libre est sans torsion.*

(2) *Si \mathbf{A} est d'Ore, un module M de type fini est **sans torsion** si, et seulement si il existe un entier r et un monomorphisme (i.e., un "plongement") $M \hookrightarrow \mathbf{A}^{1 \times r}$. (Gentile, 1960).*

Isomorphismes

(a) Théorèmes de Noether

(1) Soit $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme.

$$M / \ker (f) \cong \operatorname{im} (f).$$

(2) Soit M_1, M_2 des sous-modules de M .

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} \cong \frac{M_1}{M_1 \cap M_2}.$$

(3) Soit $M_1 \subset M_2 \subset M_3$ des modules.

$$\frac{M_3}{M_2} \cong \frac{M_3/M_1}{M_2/M_1}.$$

(b) Correspondance

Soit $N \subset M$ des modules. Il existe une **correspondance biunivoque** entre les modules L tels que $N \subset L \subset M$ et les sous-modules de M/N donnée par

$$L \mapsto \frac{L}{N}$$

(c) Produit

Soit M_1, M_2, N_1, N_2 des modules tels que $N_i \subset M_i$ ($i = 1, 2$). Alors

$$\frac{M_1 \times M_2}{N_1 \times N_2} \cong \frac{M_1}{N_1} \times \frac{M_2}{N_2}$$

(d) Homomorphisme induit

Soit M_1, M_2, N_1, N_2 des modules tels que $N_i \subset M_i$ ($i = 1, 2$) et $f : M_1 \rightarrow M_2$.

(1) Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $f(N_1) \subset N_2$,

(ii) il existe un homomorphisme $\bar{f} : M_1/N_1 \rightarrow M_2/N_2$ induit par f rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ \downarrow \varphi_1 & \bar{f} & \downarrow \varphi_2 \\ M_1/N_1 & \longrightarrow & M_2/N_2 \end{array}$$

(2) Alors

$$\ker(\bar{f}) = \varphi_1(f^{-1}(N_2)), \quad \text{im}(\bar{f}) = \varphi_2(\text{im}(f)).$$

Démonstration de (1):

(i) \implies (ii): Supposons $f(N_1) \subset N_2$. Soit

$$\tilde{f} : M_1 \rightarrow M_2/N_2 : x \mapsto f(x) + N_2.$$

Si $x - x' \in N_1$, alors $f(x - x') \in N_2 \implies \tilde{f}(x - x') = 0$.

$\implies \tilde{f}(x)$ ne dépend que de $x + N_1$.

\implies On définit

$$\bar{f} : M_1/N_1 \rightarrow M_2/N_2 : x + N_1 \mapsto \tilde{f}(x) = f(x) + N_2.$$

(ii) \implies (i): Supposons qu'il existe $\bar{f} : M_1/N_1 \rightarrow M_2/N_2$ et $\bar{f} \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$.

Alors $x \in N_1 \implies \varphi_1(x) = 0 \implies (\bar{f} \circ \varphi_1)(x) = 0 \implies (\varphi_2 \circ f)(x) = 0 \implies f(x) \in N_2$.

Donc, $f(N_1) \subset N_2$.

(2) Calcul de $\ker(\bar{f})$:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) = 0 &\iff \varphi_2(f(x)) = 0 \iff f(x) \in N_2 \iff x \in \\ &f^{-1}(N_2) \iff \varphi_1(x) \in \varphi_1(f^{-1}(N_2)) \end{aligned}$$

$$\implies \ker(\bar{f}) = \varphi_1(f^{-1}(N_2))$$

(2') Calcul de $\text{im}(\bar{f})$:

$$\bar{y} \in \text{im}(\bar{f}) \Leftrightarrow \exists \bar{x} \in M_1/N_1 : \bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) = \varphi_2(f(x)).$$

Donc,

$$\text{im}(\bar{f}) = \varphi_2(\text{im}(f))$$

2.3. Modules de présentation finie (suite)

Définition d'un module par générateurs et relations

Considérons de nouveau l'équation (2):

$$Rw = 0, \quad R \in \mathbf{D}^{q \times k}$$

R représente un homomorphisme $f : \mathbf{D}^{1 \times q} \rightarrow \mathbf{D}^{1 \times k}$ dans les bases canoniques. On note

$$f = (\bullet R)$$

= multiplication à droite par la matrice R .

The diagram shows a matrix multiplication. On the left, a row vector is represented by a horizontal dashed line within square brackets, with the label $\zeta \in \mathbf{D}^{1 \times q}$ below it. To its right is a square grid representing a matrix $R \in \mathbf{D}^{q \times k}$, with the label $R \in \mathbf{D}^{q \times k}$ below it. An equals sign follows, and to its right is another row vector represented by a horizontal dashed line within square brackets, with the label $\varepsilon \in \mathbf{D}^{1 \times k}$ below it.

Soit

- $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq q}$ la base canonique de $\mathbf{D}^{1 \times q}$
- $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq k}$ la base canonique de $\mathbf{D}^{1 \times k}$.

Alors

$$\zeta_i R = \sum_{j=1}^k r_{ij} \varepsilon_j = \textit{i\`eme ligne de } R.$$

Soit w_j l'image canonique de ε_j dans $\mathbf{D}^{1 \times k} / \text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$.

Puisque

$$\sum_{j=1}^k r_{ij} \varepsilon_j \in \text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R),$$

on a

$$\sum_{j=1}^k r_{ij} w_j = 0 \iff R \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}}_w = 0.$$

= équation (2).

Soit $M = [w]_{\mathbf{D}} \triangleq$ le module engendré par $\{w_1, \dots, w_k\}$.

M est défini par les générateurs $\{w_1, \dots, w_k\}$ et les q relations de (2).

$\mathbf{D}^{1 \times k} =$ module des générateurs , $\mathbf{D}^{1 \times q} =$ module des relations

Exemple

Construction du système $a\dot{y} + bu = 0$, $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\mathbf{D} = \mathbb{C}[\partial], \partial = d/dt$$

$\{\zeta\}$ = base canonique de \mathbf{D} : $\zeta = 1$

$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ = base canonique de $\mathbf{D}^{1 \times 2}$: $\varepsilon_1 = (1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1)$.

$$f(\zeta) = (a\partial)\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} a\partial & b \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

$\varphi : \mathbf{D}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbf{D}^{1 \times 2} / \text{im}(f)$ épimorphisme canonique.

$$y = \varphi(\varepsilon_1), u = \varphi(\varepsilon_2).$$

$$\varphi(f(\zeta)) = 0 \Leftrightarrow (a\partial)y + bu = 0 \Leftrightarrow a\dot{y} + bu = 0.$$

Caractère intrinsèque d'un module

M reste inchangé si on fait des permutations des relations, des générateurs, etc.

Par conséquent,

- le module M est un objet intrinsèque,
- (2) résulte d'un choix arbitraire dans la "mise en équation".

Le système qu'on veut modéliser peut donc s'identifier à M , non à l'équation particulière (2).

2.4 Suites exactes

Définition

Soit un diagramme de modules et d'homomorphismes de la forme

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \dots$$

où la composition $f_{n+1} \circ f_n$ est bien définie pour tout n .

Ce diagramme est une suite exacte en M_n si

$$\boxed{\operatorname{im}(f_n) = \ker(f_{n+1})}.$$

Ce diagramme est une suite exacte si elle est exacte en M_n pour tout n .

Exemples

(1)

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

f est un monomorphisme

(2)

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow 0$$

f est un épimorphisme

(3)

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow 0$$

f est un isomorphisme

(4)

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

$$\text{im}(f) = \ker(g), \quad M_3 = \text{im}(g).$$

Décomposition canonique de g :

$$\begin{array}{ccc} M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ \varphi \downarrow & & \nearrow \psi \\ M_2 / \ker g & & \end{array}$$

$\psi =$ isomorphisme: $M_3 \cong M_2 / \ker(g) = M_2 / \text{im}(f) \triangleq \text{coker}(f)$.

D'où:

$$\boxed{M_3 \cong \text{coker}(f)}.$$

(5)

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

= suite exacte courte .

M_2 = extension de M_1 par M_3 ,

$$M_1 \cong \ker(g), \quad M_3 \cong \operatorname{coker}(f).$$

Cas particulier:

$$M_2 = M_1 \times M_3. \tag{4}$$

Retour sur l'équation (2)

Equation:

$$Rw = 0. \quad (2)$$

Module:

$$M = [w]_{\mathbf{D}} = \mathbf{D}^{1 \times k} / \text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R) = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$$

Le module M est représenté par la suite exacte:

$$\mathbf{D}^{1 \times q} \xrightarrow{(\bullet R)} \mathbf{D}^{1 \times k} \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

où $\varphi : \mathbf{D}^{1 \times k} \twoheadrightarrow \mathbf{D}^{1 \times k} / \text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$ est l'épimorphisme canonique.

2.5. Solutions

Définition des solutions (2)

Soit W un \mathbf{D} -module à gauche.

Exemple: $W = C^\infty(\Omega, \mathbf{k})$.

Soit $R \in \mathbf{D}^{q \times k}$. On définit l'ensemble des solutions dans W^k :

$$\mathfrak{B} = \{ \mathbf{w} \in W^k : R\mathbf{w} = \mathbf{0} \}$$

= **behavior** au sens de Willems.

Par conséquent,

$$\mathfrak{B} = \ker_W (R\bullet).$$

Théorème 23 Si \mathbf{D} est une \mathbf{A} -algèbre (\mathbf{A} anneau commutatif), \mathfrak{B} est un \mathbf{A} -module. En particulier, si \mathbf{D} est commutatif, \mathfrak{B} est un \mathbf{D} -module.

Exemple: $\mathbf{D} = A_1(\mathbf{k}) = \mathbf{k}[t, \partial]$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $W = C^\infty(\Omega, \mathbf{k})$.

\mathfrak{B} est un \mathbf{k} -espace vectoriel.

\mathfrak{B} n'est pas un $A_1(\mathbf{k})$ -module:

Soit

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &\triangleq \{\mathbf{w} \in W : \partial\mathbf{w} = 0\} \\ &= \mathbf{k}.\end{aligned}$$

En particulier, $1 \in \mathfrak{B}$ mais $t \notin \mathfrak{B}$.

Le foncteur \mathfrak{B}_W

\mathfrak{B}_W :

1. $M \rightarrow \mathfrak{B}_W(M) \triangleq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(M, W)$

2. Si $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(M_1, M_2)$, on a

$$\mathfrak{B}_W(\alpha) : \underbrace{\text{Hom}_{\mathbf{D}}(M_2, W)}_{\mathfrak{B}_W(M_2)} \rightarrow \underbrace{\text{Hom}_{\mathbf{D}}(M_1, W)}_{\mathfrak{B}_W(M_1)} : \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha :$$

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 \\ \mathfrak{B}_W(\alpha)(\varphi) & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & W \end{array}$$

$$\mathfrak{B}_W(\alpha)(\varphi) = \varphi \circ \alpha$$

Le foncteur \mathfrak{B}_W est contravariant:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 \\ & \searrow \varphi_1 & \downarrow & & \swarrow \varphi_3 \\ & & W & & \end{array}$$

La flèche du milieu est $\varphi_2 = \varphi_3 \circ \alpha_2 = \mathfrak{B}_W(\alpha_2)(\varphi_3)$. On a

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ \alpha_1 = \mathfrak{B}_W(\alpha_1)(\varphi_2) = \mathfrak{B}_W(\alpha_1)(\mathfrak{B}_W(\alpha_2)(\varphi_3)),$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_1) = \mathfrak{B}_W(\alpha_2 \circ \alpha_1)(\varphi_3),$$

par conséquent \mathfrak{B}_W reverse les flèches:

$$\boxed{\mathfrak{B}_W(\alpha_2 \circ \alpha_1) = \mathfrak{B}_W(\alpha_1) \circ \mathfrak{B}_W(\alpha_2)}$$

Interprétation de $\mathfrak{B}_W(\mathbf{D}^{1 \times k}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}^{1 \times k}, W)$

$(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq k}$ la base canonique de $\mathbf{D}^{1 \times k}$

$$\begin{aligned} \psi & : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}^{1 \times k}, W) \rightarrow W^k \\ \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}^{1 \times k}, W) & \ni g \mapsto \psi(g) = \begin{bmatrix} g(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ g(\varepsilon_k) \end{bmatrix} \in W^k \end{aligned}$$

ψ est un isomorphisme canonique permettant d'identifier $\mathfrak{B}_W(\mathbf{D}^{1 \times k})$ et W^k .

Cas particulier: $k = 1$

$\psi : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}, W) \rightarrow W : f \mapsto f(1)$.

ψ est **D-lineaire**: $\psi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g)$.

ψ est **injective**:

$\psi(f) = 0 \implies f(1) = 0 \implies (f(\alpha) = \alpha f(1) = 0, \forall \alpha \in \mathbf{D})$

$\implies f = 0$.

ψ est **surjective**: soit $w \in W$ et $f : \alpha \mapsto \alpha w$. Alors $\psi(f) = w$.

Conséquence

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{D}^{1 \times q} & \xrightarrow{\bullet R} & \mathbf{D}^{1 \times k} & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Wq & \xleftarrow{R \bullet} & W^k & \xleftarrow{\iota} & \mathfrak{B}_W(M) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Toutes les flèches verticales représentent le foncteur \mathfrak{B}_W .

φ est l'épimorphisme canonique $\mathbf{D}^{1 \times k} \twoheadrightarrow M$

ι est le monomorphisme $\mathfrak{B}_W(M) \hookrightarrow W^k$

$$\mathfrak{B}_W(M) = \text{Hom}_{\mathbf{D}} \left(\mathbf{D}^{1 \times k} / \text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R), W \right)$$

s'identifie aux éléments de W^k qui s'annulent sur $\text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_W(M) &= \{ \mathbf{w} \in W^k : R\mathbf{w} = 0 \} \\ &= \ker_W(R\bullet) \end{aligned}$$

$$M = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R) \xrightarrow{\mathfrak{B}_W} \mathfrak{B} = \ker_W(R\bullet)$$

(Malgrange, 1962, en utilisant les idées de Grothendieck en Géométrie algébrique).

Explicitation de l'isomorphisme de Malgrange

Données:

$$\mathfrak{B} = \ker_W (R\bullet), \quad R \in \mathbf{D}^{q \times k}, \quad U = \mathbf{D}^{1 \times q} R, \quad M = \mathbf{D}^{1 \times k} / U.$$

Soit

$$\phi_w : M \rightarrow W : \bar{g} \mapsto gw \quad (w \in \mathfrak{B}, g \in \mathbf{D}^{1 \times k})$$

(i) $\phi : \mathfrak{B} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(M, W) : w \mapsto \phi_w$ est **bien définie**:

$$\bar{g}_1 = \bar{g}_2 \Leftrightarrow g_1 - g_2 \in U \implies (g_1 - g_2)w = 0, \forall w \in \mathfrak{B}.$$

(ii) ϕ est **injective**:

$$\phi_w = 0 \implies gw = 0, \forall g \in \mathbf{D}^{1 \times k} \implies w = 0.$$

(iii) ϕ est **surjective**:

Soit $\bar{\sigma} \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(M, W) : \bar{g} \mapsto \bar{\sigma}(\bar{g}) \in W$.

$\bar{\sigma}$ est induite par $\sigma : \mathbf{D}^{1 \times k} \rightarrow W$ telle que $\sigma(U) = 0$ (1er isomorphisme de Noether).

On a identifié σ avec $\psi(\sigma) = w \in W^k$. Alors $\sigma(U) = 0 \iff w \in \mathfrak{B}$.

Donc, $\bar{\sigma} = \phi_w, w \in \mathfrak{B}$.

2.6. Les étapes

On s'intéresse essentiellement au **behavior** $\ker_W (R\bullet)$

= objet mathématique compliqué (mélange d'algèbre et d'analyse)

1. On commence par étudier le **D-module** $M = \text{coker}_D (\bullet R) =$ objet purement algébrique (donc plus simple)
2. Puis **on choisit le "bon espace fonctionnel"** $W =$ problème analytique.
3. Par le foncteur $\mathfrak{B}_W = \text{Hom}_D (\bullet, W)$, on obtient finalement le **behavior** $\ker_W (R\bullet)$ souhaité

Cette approche est **l'analyse algébrique** .

2.7 Exercices

Exercice 24 Soit M_1, M_2, N_1, N_2 des modules tels que $N_i \subset M_i$ ($i = 1, 2$) et $f : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $f(N_1) \subset N_2$. Soit $\bar{f} : M_1/N_1 \rightarrow M_2/N_2$ l'homomorphisme induit. Montrer que

(i) \bar{f} est un monomorphisme si, et seulement si $f^{-1}(N_2) \subset N_1$. Cas particulier où $N_2 \subset \text{im}(f)$?

(ii) \bar{f} est un épimorphisme si, et seulement si $M_2 = N_2 + \text{im}(f)$.

Exercice 25 Pour une extension de la forme (4), décrire les homomorphismes f et g .

Exercice 26 Détailler l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}, W) \cong W$.

Exercice 27 Détailler l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}^{1 \times k}, W) \cong W^k$.

Exercice 28 Soit $\mathbf{D} = A_1(\mathbb{C})$ et $R = t$.

(i) Montrer que $M = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R) \neq 0$.

(ii) Déterminer $\mathfrak{B} = \ker_W(R\bullet)$ lorsque

(a) $W = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

(b) $W = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Éléments d'algèbre homologique et d'analyse algébrique

3.1. Passage des équations aux solutions

La connexion de Galois

Système d'équation

$$Rw = 0, \quad R \in \mathbf{D}^{q \times k}.$$

Représentation intrinsèque: système = \mathbf{D} -module $M = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$.

Behavior:

$$\mathfrak{B} = \{w \in W^k : Rw = 0\} = \ker_W(R\bullet)$$

Soit $w \in W^k$.

$$w \in \mathfrak{B} \iff \exists r \in \text{im}_{\mathbf{D}}(\bullet R) : rw = 0.$$

Soit

$$N = \text{im}_{\mathbb{D}} (\bullet R)$$

En définissant

$$N^{\perp} = \{ \mathbf{w} \in W^k : r\mathbf{w} = \mathbf{0}, \forall r \in N \},$$

on obtient

$$\boxed{\mathfrak{B} = N^{\perp}}.$$

Connaissant M , on peut déterminer \mathfrak{B} . Connaissant \mathfrak{B} , peut-on déterminer M ?

Définissons

$$\mathfrak{B}^\perp = \left\{ r \in \mathbf{D}^{1 \times k} : r\mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{w} \in \mathfrak{B} \right\}.$$

D'où deux orthogonalités $(\bullet)^\perp$:

$$N \mapsto N^\perp, \quad \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}^\perp. \quad (5)$$

Lemme et Définition 29 (i) Si \mathbf{D} est noethérien, $\mathfrak{B}^\perp \subset \mathbf{D}^{1 \times k}$ est de type fini.

(ii)

$$\begin{aligned} N &\subset N^{\perp\perp}, & \mathfrak{B} &\subset \mathfrak{B}^{\perp\perp} \\ N^{\perp\perp\perp} &= N^\perp, & \mathfrak{B}^\perp &= \mathfrak{B}^{\perp\perp\perp} \end{aligned}$$

(iii) La correspondance (5) est appelée une **connexion de Galois**.

3.2. Passage des solutions aux équations

Notion de cogénérateur

Définition 30 *Un module W est appelé un cogénérateur si pour tous modules M_1, M_2 et tout homomorphisme $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$, il existe $\varphi : M_2 \rightarrow W : \varphi \circ \alpha \neq 0$ si $\alpha \neq 0$.*

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & W \end{array}$$

Théorème 31 (Oberst, 1990) *Si W est un cogénérateur, alors*

- (i) $N = N^{\perp\perp}, \forall N \subset \mathbf{D}^{1 \times k}$,
- (ii) $\ker_W (R' \bullet) \subset \ker_W (R \bullet) \iff \exists X \in \mathbf{D}^{q \times q'} : R = X R'$,
- (iii) $\mathfrak{B}_W (M) = \mathfrak{B}_W (M') \iff M = M'$.

Module injectif

Définition 32 *Un module W est **injectif** si dès lors que la suite*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

est exacte, la suite

$$0 \longleftarrow \mathfrak{B}_W(M_1) \xleftarrow{\mathfrak{B}_W(f)} \mathfrak{B}_W(M_2)$$

est exacte.

Théorème 33 *Si D est un anneau de Dedekind, W est injectif si, et seulement si il est **divisible**:*

$$aW = W, \quad \text{pour tout } 0 \neq a \in \mathbf{D}.$$

Modules simples, modules cycliques

Un \mathbf{D} -module à gauche S est simple s'il n'a pas de sous-module autre que 0 et S .

Un \mathbf{D} -module à gauche C est cyclique s'il est engendré par un élément.

Un idéal à gauche \mathfrak{m} est maximal si $\mathbf{D} \supsetneq \mathfrak{a} \supset \mathfrak{m} \implies \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Théorème 34 (1) Un \mathbf{D} -module à gauche C est cyclique si, et seulement si il existe un idéal à gauche \mathfrak{a} tel que $C \cong \mathbf{D}/\mathfrak{a}$.

(2) Tout module simple est cyclique, et \mathbf{D}/\mathfrak{a} est simple si, et seulement si \mathfrak{a} est maximal.

(3) Si \mathbf{D} est un anneau principal à gauche, \mathfrak{a} est maximal si, et seulement si il existe un atome a tel que $\mathfrak{a} = \mathbf{D}a$.

Démonstration. (1): Soit $C = [m]_{\mathbf{D}}$,

$$\mathfrak{a} = \text{Ann}_{\mathbf{D}}(m) = \{d \in \mathbf{D} : dm = 0\},$$

$$\alpha : \mathbf{D} \rightarrow C : 1 \mapsto m.$$

Alors $\mathfrak{a} = \ker \alpha$ et il existe un isomorphisme ψ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \varphi \downarrow & \psi \nearrow & \\ \mathbf{D}/\mathfrak{a} & & \end{array}$$

(2): Les sous-modules de \mathbf{D}/\mathfrak{a} sont les $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathbf{D}$. Le reste de la preuve est un [exercice](#). ■

Cogénérateurs injectifs

Théorème 35 Soit W un \mathbf{D} -module à gauche *injectif*. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) W est *cogénérateur*;
- (ii) pour tout \mathbf{D} -module simple S , $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(S, W) \neq 0$;
- (iii) pour tout idéal à gauche maximal \mathfrak{m} , $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}/\mathfrak{m}, W) \neq 0$.

On peut remplacer (iii) par

- (iv) Pour tout idéal à gauche \mathfrak{a} , $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}/\mathfrak{a}, W) \neq 0$.

Supposons que \mathbf{D} soit une \mathbf{K} -algèbre (\mathbf{K} anneau commutatif).

Théorème 36 *Si W est un cogénérateur injectif, la suite de \mathbf{D} -modules à gauche*

$$M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3$$

est exacte si, et seulement si la suite de \mathbf{K} -modules

$$\mathfrak{B}_W(M_1) \xleftarrow{\mathfrak{B}_W(\alpha)} \mathfrak{B}_W(M_2) \xleftarrow{\mathfrak{B}_W(\beta)} \mathfrak{B}_W(M_3)$$

est exacte.

Autement dit, un \mathbf{D} -module W est un cogénérateur injectif si le foncteur

$$\mathfrak{B}_W : \mathbf{D}\text{Mod} \rightarrow \mathfrak{B}_W(\mathbf{D}\text{Mod}) \subset \mathbf{K}\text{Mod}$$

induit une **dualité parfaite**.

3.3. Cas concrets

Systèmes linéaires à coefficients constants

$\mathbf{D} = \mathbb{C}[\partial]$ = anneau principal

$W = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1. Soit $\mathbf{u} \in W$ et $0 \neq p(\partial) \in \mathbf{D}$. L'équation

$$p(\partial)\mathbf{y} = \mathbf{u}$$

admet toujours (au moins) une solution $\mathbf{y} \in W$, donc W est **divisible**,
et donc **injectif**.

2. Soit S un \mathbf{D} -module simple:

$$S = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}a}, \quad a = a(\partial) = \text{atome:}$$
$$a(\partial) = \partial - a_1, \quad a_1 \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(S, W) = \{\mathbf{w} \in W : (\partial - a_1)\mathbf{w} = 0\} \neq 0$$

donc

$W = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un **cogénérateur** injectif.

Systemes linéaires à coefficients rationnels

$D = \mathbb{C}(t)[\partial] = B_1(\mathbb{C}) =$ anneau principal non commutatif

Difficulté: soit $b/a \in \mathbb{C}(t)$. Les pôles réels de b/a sont des singularités.

Soit deux fonctions analytiques f, g définies dans un voisinage de $+\infty$ dans \mathbb{R} .

Soit la relation d'équivalence:

$$f \sim g \text{ s'il existe } A \in \mathbb{R} : f|_{]A, +\infty[} = g|_{]A, +\infty[}$$

Ensemble des classes d'équivalences:

$$\mathcal{O}_\infty = \{\text{germes des fonctions analytiques définies dans un voisinage de } +\infty\}$$

Intuitivement: un élément de \mathcal{O}_∞ est une fonction analytique définie sur $]A, +\infty[$ pour A suffisamment grand.

Lemme 37 \mathcal{O}_∞ est un $B_1(\mathbb{C})$ -module injectif.

Démonstration. (1) Soit $0 \neq p(\partial) \in B_1(\mathbb{C})$,

$$p(\partial) = \partial^n + a_1 \partial^{n-1} + \dots + a_n.$$

Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que les pôles réels des a_i ($1 \leq i \leq n$) sont tous $< A$. Les a_i sont analytiques sur $]A, +\infty[$. Pour tout $B \geq A$ et toute $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(]B, +\infty[)$, l'équation

$$p(\partial) \mathbf{y} = \mathbf{u}$$

a une solution $\mathbf{y} \in \mathcal{O}(]B, +\infty[)$, donc $W = \mathcal{O}_\infty$ est un **module divisible**.

■

Théorème 38 \mathcal{O}_∞ est un cogénérateur injectif sur $B_1(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $S = \mathbf{D}/\mathfrak{a}$ un \mathbf{D} -module simple ($\mathbf{D} = B_1(\mathbb{C})$) et $W = \mathcal{O}_\infty$.

\mathbf{D} est un anneau principal, donc $\mathfrak{a} = \mathbf{D}p$ où $p = p(\partial) \neq 0$ est un **atome** de $B_1(\mathbb{C})$. Il existe $A > 0$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(S, W) = \{y \in \mathcal{O}(]A, +\infty[) : p(\partial)y = 0\} \neq 0$$

■

Systemes linéaires à coefficients analytiques

On ne connaît pas de cogénérateur "raisonnable" (i.e., ayant une signification analytique claire) sur $A_1(\mathbb{C})$ (voir, *infra*, l'exercice 47).

Sur $A_0(\Omega; \mathbb{C}) \triangleq \mathcal{R}_\Omega[\partial]$ (Exercice 18), $\mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ est un module qui n'est ni injectif, ni cogénérateur: voir *infra*, Exercice 45.

De même pour $\mathcal{D}'(\Omega)$, car il n'existe pas de solution non nulle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à l'équation

$$(t^3\partial + 2)y = 0$$

(Schwartz, "Théorie des distributions", 1966).

On va donc utiliser un ensemble plus gros que $\mathcal{D}'(\Omega)$: celui des **hyperfonctions** $\mathcal{B}(\Omega)$.

Hyperfonction = "distribution pouvant être localement d'ordre infini"
(Mikio Sato, 1960).

Théorème 39 (Fröhler & Oberst, 1998). Sur $A_0(\Omega; \mathbb{C})$, l'ensemble des hyperfonctions $\mathcal{B}(\Omega) \underset{\neq}{\supseteq} \mathcal{D}'(\Omega)$ est un cogénérateur injectif.

Le théorème de Fröhler & Oberst est une conséquence des théorèmes de Sato (divisibilité, donc injectivité) et de Komatzu (cogénérateur).

Théorème 40 (Théorème de Sato). *Soit*

$$P\left(t, \frac{d}{dt}\right) = \sum_{i=0}^m a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}, \quad a_m \neq 0$$

un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur l'intervalle ouvert

$\Omega \subset \mathbb{R}$.

$P\left(t, \frac{d}{dt}\right) : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(\Omega)$ est *surjectif*.

Théorème 41 (Théorème de Komatsu). Avec les notations précédentes,

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker_{\mathcal{B}(\Omega)} (P\bullet) = m + \sum_{t \in \Omega} \text{ord}_t a_m$$

où $\text{ord}_t a_m$ est l'ordre du zéro en t du coefficient directeur a_m .

Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) $a_m(t) \neq 0$ pour tout $t \in \Omega$;
- (b) $\ker_{\mathcal{B}(\Omega)} (P\bullet) \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$;
- (c) $P\left(t, \frac{d}{dt}\right) f \in \mathcal{O}(\Omega)$ implique $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Supposons le point t singulier (i.e., $\text{ord}_t a_m > 0$), considérons le plus haut polyèdre convexe sous les $m + 1$ points

$$(j, \text{ord}_t a_j), \quad 0 \leq j \leq m,$$

("polygone de Newton") et soit σ_t sa plus grande pente. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a') $\sigma_t \leq 1$ pour tout $t \in \Omega$;
- (b') $\ker_{\mathcal{B}(\Omega)} (P\bullet) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$;
- (c') $P\left(t, \frac{d}{dt}\right) f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ implique $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

3.4. Exercices

Exercice 42 Soit $\mathbf{D} = \mathbb{C}[\partial]$ et

$$W = \sum_{\lambda, k \in \mathbb{C}} k e^{\lambda t}.$$

- (1) Montrer que pour tout \mathbf{D} -module simple S , $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(S, W) \neq 0$.
- (2) Ce module W est-il cogénérateur?

Exercice 43 Mêmes questions qu'à l'exercice 42 en considérant

$$W = \sum_{n \in \mathbb{N}} k t^n.$$

Exercice 44 (1) *Mêmes questions qu'à l'exercice 42 en considérant*

$$W = \sum_{\substack{\lambda, k \in \mathbb{C} \\ n \in \mathbb{N}}} kt^n e^{\lambda t}.$$

(2) *Peut-on trouver un cogénérateur plus petit?*

Exercice 45 *Monter que sur $A_0(\Omega; \mathbb{C}) = \mathcal{R}_\Omega[\partial]$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ n'est pas cogénérateur.*

Exercice 46 *Soit $R = t(t\partial - 1) \in A_1(\mathbb{C})$.*

(i) *Calculer $\dim_{\mathbb{C}} \ker_{\mathcal{B}(\Omega)}(R\bullet)$.*

(ii) *Tracer le polygone de Newton et déterminer σ_x pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Conclusion?

(iii) *Montrer que $\ker_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}(R\bullet) = \mathbb{C}t + \mathbb{C}t\Upsilon + \mathbb{C}\delta$.*

Exercice 47 Soit $R(\partial) = t^2 + 1 \in A_1(\mathbb{C})$.

(i) Montrer que $M = \text{coker}_{A_1(\mathbb{C})}(\bullet R) \neq 0$.

(ii) Montrer que pour tout intervalle ouvert $\Omega \neq \emptyset$ de \mathbb{R} , $\ker_{\mathcal{B}(\Omega)}(R(\partial)\bullet) = 0$. (Calculer la dimension de cet espace vectoriel en utilisant le théorème de Komatsu.)

(iii) Soit Ω un intervalle non vide quelconque de \mathbb{R} . Le $A_1(\mathbb{C})$ -module $\mathcal{B}(\Omega)$ est-il cogénérateur?

Exercice 48 Soit $R(\partial) = t^2\partial - 1 \in A_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Montrer que $\ker_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(R(\partial)\bullet) \not\subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Commandabilité et observabilité

4.1. Modules sur les anneaux d'Ore

Lemme 49 *Soit \mathbf{A} un anneau d'Ore.*

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) \mathbf{A} est noethérien à gauche.

(ii) Tout \mathbf{A} -module à gauche de type fini est de présentation finie.

(2) Soit \mathbf{A} un anneau d'Ore et M un \mathbf{A} -module à gauche de présentation finie. On a la suite exacte

$$\mathcal{T}(M) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\varphi} M/\mathcal{T}(M) \longrightarrow 0$$

où $M/\mathcal{T}(M)$ est sans torsion et où $\mathcal{T}(M)$ et $M/\mathcal{T}(M)$ sont de présentation finie si \mathbf{A} est noethérien .

Lemme 50 Soit \mathbf{A} un anneau d'Ore. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Etant donné $R_1 \in \mathbf{A}^{q \times k}$, il existe un entier $r \geq 0$ et $R_2 \in \mathbf{A}^{k \times r}$ tels que la suite

$$\mathbf{A}^{1 \times q} \xrightarrow{\bullet R_1} \mathbf{A}^{1 \times k} \xrightarrow{\bullet R_2} \mathbf{A}^{1 \times r}.$$

est exacte.

(ii) Il existe un entier $r \geq 0$ et un plongement $M_1 \stackrel{\Delta}{=} \text{coker}_{\mathbf{A}}(\bullet R_1) \hookrightarrow \mathbf{A}^{1 \times r}$

$$\mathbf{A}^{1 \times q} \xrightarrow{\bullet R_1} \mathbf{A}^{1 \times k} \xrightarrow{\varphi_1} M_1 \longrightarrow 0$$

(iii) M_1 est sans torsion.

Démonstration. (ii) \Leftrightarrow (iii) d'après le théorème de Gentile (Théorème 22).

(i) \Rightarrow (ii): D'après le premier théorème de Noether, il existe un isomorphisme

$$(\bullet R_2)_{ind} : \mathbf{A}^{1 \times k} / \ker_{\mathbf{A}} (\bullet R_2) \xrightarrow{\sim} \text{im}_{\mathbf{A}} (\bullet R_2) \subset \mathbf{A}^{1 \times r}.$$

Si

$$\mathbf{A}^{1 \times q} \xrightarrow{\bullet R_1} \mathbf{A}^{1 \times k} \xrightarrow{\bullet R_2} \mathbf{A}^{1 \times r} \quad (6)$$

est exacte,

$$\ker_{\mathbf{A}} (\bullet R_2) = \text{im}_{\mathbf{A}} (\bullet R_1), \quad \mathbf{A}^{1 \times k} / \ker_{\mathbf{A}} (\bullet R_2) = M_1.$$

(ii) \Rightarrow (i): S'il existe un plongement $\iota : M_1 \hookrightarrow \mathbf{A}^{1 \times r}$, soit

$$\varphi_1 : \mathbf{A}^{1 \times k} \xrightarrow{\varphi_1} M_1, \quad (\bullet R_2) = \iota \circ \varphi_1 : \mathbf{A}^{1 \times k} \rightarrow \mathbf{A}^{1 \times r}$$

La suite (6) est exacte. ■

4.2. Commandabilité sur un anneau d'Ore

Supposons maintenant que \mathbf{A} soit un anneau d'opérateurs différentiels \mathbf{D} qui soit un anneau d'Ore et une \mathbf{K} -algèbre (\mathbf{K} anneau commutatif) et que W soit un **cogénérateur injectif**. Soit $M_1 \triangleq \text{coker}_{\mathbf{A}}(\bullet R_1)$, $R_1 \in \mathbf{A}^{q \times k}$.

Corollaire et Définition 51 (Oberst, 1990). (1) Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) M_1 est sans torsion.
- (ii) Il existe un entier $r \geq 0$ et $R_2 \in \mathbf{A}^{k \times r}$ tels que la suite de \mathbf{K} -modules

$$W^q \xleftarrow{R_1 \bullet} W^k \xleftarrow{R_2 \bullet} W^r$$

soit exacte, autrement dit

$$\ker_W(R_1 \bullet) = \text{im}_W(R_2 \bullet) \quad (7)$$

(2) Alors le **système** associé au module M_1 et le "**behavior**" $\ker_W(R_1 \bullet)$ sont dits **commandables**. (7) équivaut à

$$\boxed{\ker_W(R_1 \bullet) = \{R_2 \mathbf{v} : \mathbf{v} \in W^r\}}. \quad (8)$$

Remarque 52 (1) La relation (8) signifie que le "*behavior*" admet une "*représentation image*" et peut être entièrement *piloté* au moyen de la variable \mathbf{v} .

(2) La commandabilité est définie de manière purement intrinsèque (indépendante de toute représentation).

(3) La commandabilité est une propriété indépendante de tout choix des variables de commande (Willems, 1986).

4.3. Commandabilité d'un système d'état

Soit Ω un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et \mathbf{K} un sous-anneau de $\mathcal{O}(\Omega)$ (l'anneau intègre des fonctions analytiques sur Ω). Soit un système d'état d'ordre n à coefficients dans \mathbf{K} (donc sur l'anneau d'Ore $\mathbf{K}[\partial]$)

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu, \\ y = Hx + \sum_{i=0}^{\alpha} J_i u^{(i)} \end{cases} \quad (9)$$

et la **matrice de commandabilité**

$$\Gamma = \begin{bmatrix} P_0 & \vdots & P_1 & \vdots & \cdots & \vdots & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

définie par

$$P_0 = G, \quad P_{i+1} = \left(F - \frac{d}{dt} I_n \right) P_i, \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

On suppose qu'il existe une matrice fondamentale $X \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$\frac{dX}{dt} = FX$$

(ce qui est assuré si $\mathbf{K} = \mathcal{O}(\Omega)$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{k}$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Théorème 53 (Bourlès (2011)). *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *le système est commandable;*
- (ii) *il existe un sous-ensemble discret S de Ω tel que*

$$\text{rg}_{\mathbf{k}}(\Gamma(t)) = n \text{ pour tout } t \in \Omega \setminus S$$

(condition de Silverman & Meadows (1967); cas où $\mathbf{K} = \mathbf{k}$: condition de Kalman (1960)).

Exemple 54 *Le système $\dot{x} = t^r u$ ($r \geq 0$) est commandable.*

4.4. Dualité

Il existe une théorie générale de la dualité pour un système de commande (M, u, y) (M = module de présentation finie, u = commande, y = sortie (van der Schaft (1991), Rudolf (1996), Bourlès (2011))).

Dans le cas du système d'état (9), son dual est

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\check{x}}{dt} = F^T \check{x} + H^T \check{u} \\ \check{y} = G^T \check{x} + \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i J_i^T \check{u}^{(i)} \end{array} \right.$$

4.5. Observabilité

Définition 55 *Un système de commande est observable si son dual est commandable.*

Interprétation dans le cas d'un système d'état

- Le système d'état (9) (sur $\mathcal{O}(\Omega)[\partial]$ ou $\mathbf{k}[\partial]$) est **commandable** si, et seulement si pour tous points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{k}^n$ et tous instants $t_1, t_2 \in \Omega$, $t_2 > t_1$ il existe une commande $\mathbf{u} \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ qui transfère l'état \mathbf{x} du système de $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ à $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$.
- Ce système (ayant une commande $\mathbf{u} \in \mathcal{E}^m(\Omega)$) est **observable** si, et seulement si pour tous instants $t_1, t_2 \in \Omega$, $t_2 > t_1$, la connaissance de $\mathbf{y}]_{t_1, t_2[}$ et de $\mathbf{u}]_{t_1, t_2[}$ permet de déterminer $\mathbf{x}(t_1)$.

4.6. Exercices

Exercice 56 Soit le système défini sur $A_0(\Omega)$, d'équation

$$\partial^2 (t + 1) y = \partial t u.$$

Est-il commandable?

Exercice 57 Même question pour le système

$$(t\partial^2 + 1) y = (1 + t) u.$$

Exercice 58 On considère le système d'état (9) défini sur $\mathcal{O}(\Omega)[\partial]$ avec

$$F = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Est-il commandable?

Exercice 59 *Montrer que le bidual (i.e. le dual du dual) du système d'état (9) est de nouveau (9).*

Exercice 60 *On considère le système d'état (9) avec*

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{bmatrix}.$$

- (i) *Si σ est un paramètre constant, ce système est-il commandable?*
- (ii) *Qu'en est-il si $\sigma = t$?*

5. Modules sur les anneaux principaux

Les modules de type fini ont une structure remarquable sur

- les anneaux de **Dedekind**,
- les anneaux de **Bézout**,
- *a fortiori* sur les **anneaux principaux**, qui sont parmi les anneaux de Dedekind ceux qui sont de Bézout.

On considèrera essentiellement les anneaux principaux en distinguant

1. le cas **des anneaux commutatifs** ($\mathbf{k}[\partial]$)
2. les **anneaux non commutatifs simples** ($\mathbf{K}[\partial]$, \mathbf{K} anneau ou corps différentiel, $\mathbf{K} \supset \mathbb{Q}$).

5.1. Opérations élémentaires et secondaires

Soit \mathbf{R} un anneau et $A \in \mathbf{R}^{q \times k}$.

Soit $A' \in \mathbf{R}^{q \times k}$. On écrit

$$A' \equiv_r A \text{ (resp. } A' \equiv_l A)$$

(équivalence à droite (resp. à gauche)) s'il existe $V \in \text{GL}_k(\mathbf{R})$ (resp. $U \in \text{GL}_q(\mathbf{R})$) telle que

$$A' = AV \text{ (resp. } A' = U^{-1}A).$$

On écrit enfin

$$A' \equiv A$$

(équivalence) s'il existe $U \in \text{GL}_q(\mathbf{R})$ et $V \in \text{GL}_k(\mathbf{R})$ telles que

$$A' = U^{-1}AV.$$

Les opérations élémentaires sur les colonnes sont:

(1) remplacer la $j^{\text{ème}}$ colonne A_j par $A_j + A_i\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}, i \neq j$)

(2) multiplier A à droite par $\text{diag}(1, \dots, 1, v, 1, \dots, 1)$ où v est une unité de \mathbf{R}

(3) permuter deux colonnes.

On définit de même les opérations élémentaires sur les lignes (en remplaçant droite par gauche).

Les opérations secondaires sur les colonnes sont:

Multiplier à droite une sous-matrice de A formée de deux colonnes par une matrice $\in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$.

On définit de même les opérations secondaires sur les lignes (en remplaçant droite par gauche).

Théorème 61 (1) Une opération élémentaire ou secondaire sur les lignes (resp. les colonnes) est une multiplication à gauche (resp. à droite) de A par une matrice $U^{-1} \in \mathbf{GL}_q(\mathbf{R})$ (resp. $V \in \mathbf{GL}_k(\mathbf{R})$).

(2) Soit $E_n(\mathbf{R})$ (resp. $S_n(\mathbf{R}) \supset E_n(\mathbf{R})$) le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ engendré par toutes les matrices correspondant à des opérations élémentaires (resp. élémentaires ou secondaires). Si \mathbf{R} est un anneau principal (resp. euclidien), $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) = S_n(\mathbf{A})$ (resp. $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) = E_n(\mathbf{A})$).

5.2. Divisibilité des matrices

Soit \mathbf{R} un anneau d'Ore

$$A \in \mathbf{R}^{q \times m}, \quad B \in \mathbf{R}^{q \times p}.$$

- Une matrice $L \in \mathbf{R}^{q \times q}$ est un **diviseur commun à gauche** de A et B si L est un diviseur à gauche de $\begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix}$, i.e. il existe $A' \in \mathbf{R}^{q \times m}$, $B' \in \mathbf{R}^{q \times p}$ telles que

$$\begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} A' & : & B' \end{bmatrix}.$$

- Cette matrice $L \in \mathbf{R}^{q \times q}$ est un **plus grand diviseur commun à gauche (pgcdg)** de A et B si tout diviseur commun à gauche L' de A et B est un diviseur à gauche de L :

$$\begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix} = L' \begin{bmatrix} A'' & : & B'' \end{bmatrix} \implies L = L'X$$

Lemme et Définition 62 (1) Soit \mathbf{R} un anneau de Bézout, \mathbf{Q} son corps de fractions. Soit $A \in \mathbf{R}^{q \times m}$, $B \in \mathbf{R}^{q \times p}$ et

$$r = \text{rg}_{\mathbf{Q}} \left(\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix} \right).$$

Alors A et B admettent un pgcdg $L \in \mathbf{R}^{q \times q}$ tel que $\text{rg}_{\mathbf{Q}}(L) = r$ et

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix} \equiv_r \begin{bmatrix} L & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Si $r = q$, L est unique modulo une équivalence à droite. On peut toujours se ramener à ce cas.

(3) Si $L = I_r$, les matrices A et B sont dites copremières à gauche.

(4) Théorie similaire pour le pgcd à droite (pgcdd) de deux matrices $A \in \mathbf{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbf{R}^{p \times k}$ en formant

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

et leur coprimarité à droite.

5.3. Forme de Smith

Soit \mathbf{D} un anneau principal et $a \in \mathbf{D}$. On appelle *longueur* de a le nombre $|a|$ de diviseurs premiers de a si $a \neq 0$. Si $\mathbf{D} = \mathbb{C}[\partial]$, $|a| = d^\circ(a)$. Soit $R \in \mathbf{D}^{q \times k}$ telle que $\text{rg}_{\mathbf{Q}} R = r$.

Théorème et Définition 63 (1) Il existe une matrice $\Sigma \in \mathbf{D}^{q \times k}$ telle que (i) $R \equiv \Sigma$ et (ii)

$$\Sigma = \text{diag}(e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0)$$

où $e_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq r$) et

$$e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_r.$$

(2) Les éléments e_i sont uniques à une association près, $e_i = 1$ ($1 \leq i \leq r - 1$) si \mathbf{D} est simple.

(3) La matrice Σ est appelée la *forme de Smith* de R .

Exemple 64 Soit, lorsque $\mathbf{D} = \mathbb{C}[\partial]$

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} \partial & \partial & \partial^2 \\ \partial & \partial^2 & \partial^4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \partial & 0 & 0 \\ \partial & \partial^2 - \partial & \partial^4 - \partial^2 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & \partial(\partial - 1) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Traçage des opérations

$$\begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & I_q \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & U^{-1} \\ V & 0_{k \times q} \end{bmatrix}$$

Cas de l'exemple 64:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \partial^2 \\ 0 & 1 & -\partial(\partial+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \partial \\ 0 & 1 & \partial(\partial+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considérons l'équation

$$\boxed{Rw = 0} \iff \underbrace{U^{-1}RV}_{\Sigma} \underbrace{V^{-1}w}_v = 0$$
$$\iff \boxed{\Sigma v = 0}$$

D'où la paramétrisation:

$$\begin{aligned} \partial v_1 &= 0 \iff \partial(w_1 + w_2 + \partial w_3) = 0, \\ \partial(\partial - 1)v_2 &= 0 \iff \partial(\partial - 1)(w_2 + \partial(\partial + 1)w_3) = 0 \\ v_3 &= w_3 \quad \text{quelconque} \end{aligned}$$

5.4. Modules sur les anneaux principaux

Théorème 65 Soit $M = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$ un module de type fini à gauche sur un anneau de Dedekind ou de Bézout \mathbf{D} .

(1) On a la décomposition en somme directe

$$M = \mathcal{T}(M) \oplus \Phi$$

où $\mathcal{T}(M)$ est le sous-module de torsion de M et $\Phi \cong M/\mathcal{T}(M)$ est sans torsion.

(2) Si \mathbf{D} est un anneau de Bézout, Φ est libre: $\Phi \cong \mathbf{D}^{1 \times (k-r)}$.

(3) Si \mathbf{D} est un anneau de Dedekind, on a la décomposition de $\mathcal{T}(M)$ en sous-modules cycliques

$$\mathcal{T}(M) \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{D}/\mathfrak{a}_i$$

où $\mathbf{D}/\mathfrak{a}_i = 0$ ($1 \leq i \leq r-1$) si \mathbf{D} est simple, et l'idéal à gauche \mathfrak{a}_i est engendré par 2 éléments.

Théorème et Définition 66 (1) Si l'anneau \mathbf{D} est principal, l'idéal à gauche \mathfrak{a}_i est principal ($\mathfrak{a}_i = \mathbf{D}e_i$) et, si de plus \mathbf{D} est commutatif, $e_i \mid e_{i+1}$ ($1 \leq i \leq r-1$). Les \mathfrak{a}_i sont alors tels que $\mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}_{i+1}$ ($1 \leq i \leq r-1$), ils sont déterminés de manière unique et sont appelés (de même que les e_i) les *facteurs invariants (non nuls)* du module M .

(2) Dans ce cas, soit e un des facteurs invariants non inversibles de M et sa décomposition en facteurs premiers

$$e = v \prod_i p_i^{\alpha_i}.$$

On a la somme directe en modules indécomposables

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}e} \cong \bigoplus_i \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}p_i^{\alpha_i}}$$

et les $p_i^{\alpha_i}$ sont appelés les *diviseurs élémentaires* du module cyclique $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}e}$.

(3) Soit donc (p_i) un système représentatif d'éléments premiers dans \mathbf{D} . Il existe des entiers déterminés de manière unique $\mu(0) \geq 0$, $n_i \geq 0$,

$\mu(\pi_i) \geq 0$, avec $\pi_i = p_i^{n_i}$ tels que

$$\mathcal{T}(M) = \bigoplus_i \left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}\pi_i} \right)^{\mu_i}, \quad \Phi \cong \mathbf{D}^{1 \times \mu(0)}. \quad (10)$$

Les π_i (ou les $\mathbf{D}\pi_i$) sont appelés les diviseurs élémentaires non nuls de M , les $\mu(\pi_i)$, leurs multiplicités, et $\mu(0) = \text{rg}(M)$ la multiplicité du diviseur élémentaire 0.

Exemple 67 Soit $\mathbf{D} = \mathbb{C}[\partial]$ et

$$R \equiv \text{diag}(e_1, e_2, e_3, 0, \dots, 0),$$

$$e_1 = (\partial - 1)^2 (\partial - 2), \quad e_2 = (\partial - 1)^2 (\partial - 2)^2, \quad e_3 = (\partial - 1)^2 (\partial - 2)^2 (\partial - 3).$$

Diviseurs élémentaires:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\partial - 1)^2, & \mu(\pi_1) &= 3, \\ \pi_2 &= (\partial - 2), & \mu(\pi_2) &= 1, \\ \pi_3 &= (\partial - 2)^2, & \mu(\pi_3) &= 2, \\ \pi_4 &= (\partial - 3), & \mu(\pi_4) &= 1. \end{aligned}$$

Calcul des facteurs invariants à partir des diviseurs élémentaires

Former une table dont la *ième* ligne est formée des diviseurs élémentaires de la forme $p_i^{n_i}$ rangés par **puissance décroissante**. Le **produit** des éléments d'une **colonne** donne un e_j (les e_j sont obtenus en **ordre décroissant**).

p_1	$(\partial - 1)^2$	$(\partial - 1)^2$	$(\partial - 1)^2$
p_2	$(\partial - 2)^2$	$(\partial - 2)^2$	$(\partial - 2)$
p_3	$(\partial - 3)$	1	1
	e_3	e_2	e_1

Zéros de Smith

Zéros de Smith = racines des diviseurs élémentaires. Ci-dessus:

1, indices structurels: $\{2, 2, 2\}$, ordre 2, degré 6

2, indices structurels: $\{1, 2, 2\}$, ordre 2, degré 5

3, indice structurels: $\{1\}$, ordre 1, degré 1.

Ensemble des zéros de Smith:

$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3\}$

5.5. Forme de Jordan

Invariants de similitude

Soit \mathbf{K} un corps commutatif, $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ et associons-lui le système (sur $\mathbf{D} = \mathbf{K}[s]$)

$$sx = Ax \Leftrightarrow (sI_n - A)x = 0.$$

C'est l'équation du \mathbf{D} -module de torsion $M = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$ avec

$$R = sI_n - A.$$

Les facteurs invariants de M sont les invariants de similitude de A .

Forme de Jordan

Supposons \mathbf{K} algébriquement clos et considérons la décomposition (10) de $M = \mathcal{T}(M)$. Chaque diviseur élémentaire de M est de la forme

$$\pi = (s - \lambda)^\mu, \quad \lambda \in \mathbf{K}.$$

Soit ς_1 un générateur de $\frac{D}{D\pi}$ et posons

$$\varsigma_2 = (s - \lambda) \varsigma_1, \quad \dots, \quad \varsigma_\mu = (s - \lambda)^{\mu-1} \varsigma_1.$$

Alors

$$s\varsigma = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \dots & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J_\mu(\lambda)} \varsigma$$

Théorème 68 (Jordan). La matrice A est semblable à la matrice de Jordan

$$J = \bigoplus_i J_{\mu_i}(\lambda_i)$$

("somme diagonale"), i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$P^{-1}AP = J.$$

5.6. Exercices

Exercice 69 *Déterminer*

$$\mathfrak{B} = \ker_{C^\infty(\mathbb{R})} (R(\partial) \bullet)$$

avec

$$R(\partial) = \begin{bmatrix} \partial^3 - \partial^2 & \partial^3 \\ 2\partial^3 - \partial^2 & 2\partial^3 \end{bmatrix}$$

Exercice 70 *Déterminer la forme de Jordan de*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 71 *Même question avec*

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

6. Pôles et zéros

6.1. Commandabilité

Soit, sur $\mathbf{D} = \mathbf{k}[\partial]$, le système représenté par le module

$$M = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R), \quad R \in \mathbf{D}^{q \times k}, \quad \text{rg}_{\mathbf{Q}}(R) = r.$$

Lemme et Définition 72 (1) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *M est commandable, i.e. sans torsion.*

(ii) *M est libre.*

(iii) *$R \equiv \begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.*

(iv) *Le seul diviseur élémentaire de M est 0 (de multiplicité $k - r$).*

(2) *Si ces conditions ne sont pas satisfaites, les pôles non commandables sont les zéros de Smith de $\mathcal{T}(M)$.*

6.2. Observabilité

Un système de commande est un triplet (M, u, y) où:

- u est une colonne de m éléments $u_i \in M$ (commandes) tels que le module $[u]_{\mathbf{D}}$ engendré par les u_i est libre de rang m (i.e., $[u]_{\mathbf{D}} \cong \mathbf{D}^{1 \times m}$) et $M/[u]_{\mathbf{D}}$ est de torsion.
- y est une colonne de p éléments $y_i \in M$ (sorties).

Lemme et Définition 73 (1) Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $M = [u, y]_{\mathbf{D}}$.

(ii) $M/[u, y]_{\mathbf{D}} = 0$.

(2) Lorsque ces conditions sont satisfaites, (M, u, y) est dit *observable*.

(3) Dans le cas contraire, les zéros de Smith de $M/[u, y]_{\mathbf{D}}$ sont appelés les *pôles non observables*.

6.3. Pôles du système

Définition 74 Les pôles du système sont les zéros de Smith de $\frac{M}{[u]_{\mathbf{D}}}$.

Soit la décomposition

$$M = \mathcal{T}(M) \oplus \Phi$$

On peut supposer $[u]_{\mathbf{D}} \subset \Phi$. Alors

$$\frac{M}{[u]_{\mathbf{D}}} \cong \mathcal{T}(M) \oplus \frac{\Phi}{[u]_{\mathbf{D}}}$$

donc avec $\mathcal{Z}\{\bullet\} = \{\text{zéros de Smith}\}$

$$\underbrace{\mathcal{Z}\left\{\frac{M}{[u]_{\mathbf{D}}}\right\}}_{\text{pôles}} = \underbrace{\mathcal{Z}\{\mathcal{T}(M)\}}_{\text{pôles non commandables}} \oplus \underbrace{\mathcal{Z}\left\{\frac{\Phi}{[u]_{\mathbf{D}}}\right\}}_{\text{"pôles commandables"}}$$

6.4. Zéros invariants

Définition 75 Les zéros invariants sont les zéros de Smith de $\mathcal{T} \left(\frac{M}{[y]_{\mathbf{D}}} \right)$.

Application à une représentation de Rosenbrock

$$\begin{cases} D(\partial) \xi = N(\partial) u \\ y = Q(\partial) \xi + W(\partial) u \end{cases} \quad (11)$$

$D(\partial)$: matrice carrée inversible sur \mathbf{Q} , ξ = état partiel.

(1) Il s'agit bien d'un système de commande.

(2) Pôles non commandables: zéros de Smith de $\begin{bmatrix} D(\partial) & -N(\partial) \end{bmatrix}$.

(3) Pôles non observables: zéros de Smith de $\begin{bmatrix} D(\partial) \\ Q(\partial) \end{bmatrix}$.

(4) Pôles du système: zéros de Smith de $D(\partial)$.

(5) Zéros invariants: zéros de Smith de $\underbrace{\begin{bmatrix} D(\partial) & -N(\partial) \\ Q(\partial) & W(\partial) \end{bmatrix}}_{R(\partial) = \text{matrice de Rosenbrock}}$

6.5. Matrice de transfert

Foncteur de Laplace:

$$M \longrightarrow \mathcal{L}(M)$$
$$\mathcal{L} = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{D}} -$$

$\mathcal{L}(M) = \mathbf{Q}$ -espace vectoriel de base \hat{u} , $\hat{u}_i = \frac{1}{1}u_i$.

Il existe une matrice $G \in \mathbf{Q}^{p \times m}$ unique (= matrice de transfert) telle que

$$\hat{y} = G \hat{u}$$

Forme de Smith-MacMillan:

Soit d le plus petit commun dénominateur des éléments de G .

$$\implies dG \in \mathbf{D}^{p \times m}$$

$$dG \equiv \text{diag}(f_1, \dots, f_r, 0, \dots, 0)$$

Soit n_i/d_i la forme irréductible de f_i/d ($1 \leq i \leq r = \text{rg}_{\mathbf{Q}}(G)$)

On écrit:

$$G \equiv \underbrace{\text{diag}\left(\frac{n_1}{d_1}, \dots, \frac{n_r}{d_r}, 0, \dots, 0\right)}_{\text{forme de Smith-MacMillan}}$$

forme unique (**canonique**) telle que

$$n_1 \mid \dots \mid n_r, \quad d_r \mid \dots \mid d_1$$

6.6. Pôles et zéros de transmission

Définition 76 (1) Les *pôles de transmission* sont les racines des d_i .
(2) Les *zéros de transmission* sont les racines des n_i .

Exemple:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Pôles de transmission: 0, indices structurels {2}

Zéros de transmission: 0, indices structurels {1}

6.7. Zéros de découplage en entrée-sortie (i.o.d.z.) et modes cachés

Définition 77 (1) Les *i.o.d.z.* sont les zéros de Smith de $\frac{\mathcal{T}(M)}{\mathcal{T}([u, y]_{\mathbf{D}})}$.

(2) Les *modes cachés* sont les zéros de Smith de $\frac{M}{\Phi \cap [u, y]_{\mathbf{D}}}$.

Théorème 78 (Rosenbrock)

$$\{\text{modes cachés}\} = \{\text{pôles non commandables}\} \dot{\cup} \{\text{pôles non observables}\} \setminus \{\text{i.o.d.z.}\}$$

$$\{\text{pôles du système}\} = \{\text{pôles de transmission}\} \dot{\cup} \{\text{modes cachés}\}$$

Théorème 79 (*Bourlès, Fliess (1995)*)

$$\{\text{zéros de transmission}\} \dot{\cup} \{i.o.d.z.\} \subset \{\text{zéros invariants}\}$$

$$\{\text{zéros invariants}\} \subset \underbrace{\{\text{zéros de transmission}\} \dot{\cup} \{\text{modes cachés}\}}_{\text{zéros du système}}$$

6.8. Stabilité

Le système de commande est

- **stable** si ses pôles appartiennent tous au demi-plan gauche
- **stabilisable** si ses pôles non commandables appartiennent tous au demi-plan gauche
- **déTECTABLE** si ses pôles non observables appartiennent tous au demi-plan gauche
- **stable entrée-sortie** si ses pôles de transmission appartiennent tous au demi-plan gauche
- **à minimum de phase** si ses zéros de transmission appartiennent tous au demi-plan gauche

6.9. Exercices

Exercice 80 Soit le système défini par la représentation de Rosenbrock (11) avec

$$D(\partial) = (\partial + 3)^3 (\partial - 1) (\partial + 2), \quad N(\partial) = (\partial^2 - 1) (\partial + 2)$$

$$Q(\partial) = (\partial^2 - 1) (\partial + 3)^3, \quad W(\partial) = 0$$

Déterminer la fonction de transfert et ses différentes sortes de pôles et de zéros.

Exercice 81 Mêmes questions avec

$$D(\partial) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 (\partial + 1) & \partial (\partial + 2) \\ 0 & 0 & 0 & \partial + 2 \end{bmatrix}, \quad N(\partial) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad W(\partial) = 0$$

Exercice 82 *Mêmes questions avec le système d'état $\{A, B, C\}$ tel que*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 83 *Mêmes questions avec le système d'état $\{A, B, C\}$ tel que*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Structure à l'infini

7.1. Séries entières et séries de Laurent

\mathbf{K} un corps différentiel (e.g., $\mathbf{K} = \mathbb{C}(t)$).

On pose $\sigma = \partial^{-1}$.

Loi de commutation $\partial a - a\partial = \dot{a} \Leftrightarrow \sigma a - a\sigma = \sigma \dot{a} \sigma$

$\mathbf{K}[[\sigma]]$ = anneau des séries entières en σ muni de cette loi de commutation.

$\mathbf{K}[[\sigma]]$ = anneau principal local

= anneau principal \mathbf{S} ayant un unique idéal à gauche (idem à droite) maximal:

$\mathbf{S}\sigma = \sigma\mathbf{S}$ = idéal bilatère noté (σ)

Si $f = a_n\sigma^n + a_{n+1}\sigma^{n+1} + \dots$, $a_n \neq 0$:

$$f = \sigma^n \underbrace{(a_n + a_{n+1}\sigma + \dots)}_v$$

$v =$ unité de $\mathbf{K}[[\sigma]]$.

Corps des fractions de $\mathbf{K}[[\sigma]]$: corps des séries de Laurent $\mathbf{K}((\sigma))$.

Élément de $\mathbf{K}((\sigma))$:

$$\frac{f}{g} = \sum_{n \geq \kappa} a_n \sigma^n \quad (\kappa \in \mathbb{Z}).$$

7.2. Application aux fonctions de transfert

$$G(\partial) = \frac{N(\partial)}{D(\partial)} \in \mathbf{K}(\partial)$$

$$N(\partial) = b_0\partial^m + \dots + b_m, \quad D(\partial) = a_0\partial^n + \dots + a_n, \quad b_0a_0 \neq 0.$$

On plonge $\mathbf{K}(\partial)$ dans $\mathbf{K}((\sigma))$:

$$G(\partial) = \sigma^{n-m}v,$$

v = unité de $\mathbf{K}[[\sigma]]$.

Supposons $\mathbf{K} = \mathbb{C}$.

$G(\partial)$ a $\begin{cases} m \text{ zéros finis} \\ n \text{ pôles finis} \end{cases}$

Si $n > m$: $G(\partial)$ a $n - m$ zéros à l'infini.

Si $m > n$: $G(\partial)$ a $n - m$ pôles à l'infini.

Dans tous les cas:

nombre total de zéros = nombre total de pôles

7.3. Application aux matrices de transfert

$G(\partial) \in \mathbf{K}(\partial)^{p \times m}$. Même procédé: on plonge $\mathbf{K}(\partial)$ dans $\mathbf{K}((\sigma))$.

On détermine la forme de Smith-MacMillan de $G(\partial)$ dans $\mathbf{K}((\sigma))$:

$$G(\partial) \sim \text{diag} \{ \sigma^{n_1}, \dots, \sigma^{n_k} \}, \quad n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$$

Nombre de zéros à l'infini: $\sum_{n_i > 0} n_i$.

Nombre de pôles à l'infini: $-\sum_{n_i < 0} n_i$.

Supposons $\mathbf{K} = \mathbb{C}$.

Degré de MacMillan: $\delta_p =$ nombre de pôles (finis et infinis)

$\delta_z =$ nombre de zéros (finis et infinis)

Défaut ("defect") de $G(\partial)$:

$$\delta = \delta_p - \delta_z \geq 0.$$

Si $G(\partial)$ est carrée non singulière: $\delta = 0$.

Exemple 1

$$G(\partial) = \left[\partial \quad \frac{1}{\partial^2} \right]$$

Pôles et zéros finis:

$$G(\partial) = \frac{1}{\partial^2} \left[\partial^3 \quad 1 \right] \sim \frac{1}{\partial^2} \left[1 \quad 0 \right]$$

0 zéro fini, 2 pôles finis.

Pôles et zéros à l'infini:

$$G(\partial) = \frac{1}{\sigma} \left[1 \quad \sigma^3 \right] \sim \frac{1}{\sigma} \left[1 \quad 0 \right] = \left[\frac{1}{\sigma} \quad 1 \right]$$

0 zéro à l'infini, 1 pôle à l'infini. $\implies \delta_p = 3, \delta_z = 0$

Exemple 2

$$G(\partial) = \begin{bmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial^2} \end{bmatrix}$$

2 pôles finis, 1 zéro fini.

Pôles et zéros à l'infini:

$$G(\partial) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

2 zéros à l'infini, 1 pôle à l'infini. $\implies \delta_p = 3, \delta_z = 3$

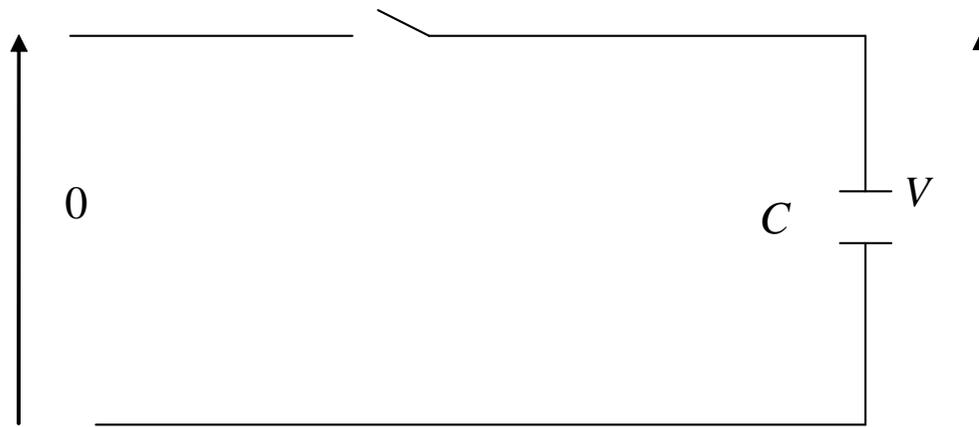


Figure 1:

7.4. Pôles non commandables à l'infini

Exemple

$C = 1$. Variables: $w_1 = V$, $w_2 = i$.

$$t < 0 : \begin{cases} w_1 = q \\ w_2 = i \end{cases} \quad t \geq 0 : \begin{cases} \partial w_1(t) - w_2(t) = 0 \\ w_1(t) = 0 \end{cases}$$

Passage par Laplace:

$$\begin{cases} s\hat{w}_1(s) - w_1(0^-) - \hat{w}_2(s) = 0 \\ \hat{w}_1(s) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \hat{w}_2(s) = -w_1(0^-) \implies w_1(t) = -w_1(0^-) \delta(t) \implies$$

$$w_2 \in \mathbb{C}\delta$$

Algébrisation de la solution

Pour $t \geq 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \partial & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{R(\partial)} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$$

Factorisation copremière à gauche sur $\mathbf{K}[[\sigma]]$:

$$R(\sigma^{-1}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D^+(\sigma)}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\sigma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{R^+(\sigma)}$$

$$M^+ = \text{coker}_{\mathbb{K}[[\sigma]]} (\bullet R^+(\sigma))$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\sigma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{R^+(\sigma)} \begin{bmatrix} w_1^+ \\ w_2^+ \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1^+ = 0 \\ \sigma w_2^+ = 0 \end{cases}$$

On en "dédduit" le **mouvement impulsionnel**

$$w_2 \in \mathbb{C}\delta$$

(Bourlès, 2005)

Justification

Supposons $\mathbf{K} = \mathbb{C}$

$W = C^\infty = \mathbf{K}[\partial]$ -module

$$W_0 = (\Upsilon - 1)W \implies \partial W_0 = W_0 \oplus \mathbf{K}\delta \implies \partial^2 W_0 = W_0 \oplus \mathbf{K}\delta \oplus \mathbf{K}\dot{\delta}$$

Le $\mathbf{K}[\partial]$ -module engendré par W_0 est $W_0 \oplus \Delta$,

$$\Delta = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{K}\delta^{(n)}$$

$$\sigma(\cdot) = \int_{+\infty}^t (\cdot) dt \implies \sigma\delta = \Upsilon - 1$$

W_0 et $W_0 \oplus \Delta$ sont des \mathbf{S} -modules ($\mathbf{S} = \mathbf{K}[[\sigma]]$).

$$\Delta \cong \frac{W_0 \oplus \Delta}{W_0} = \bar{\Delta}$$

Image de δ dans $\bar{\Delta}$: $\bar{\delta}$

Image de $\sigma\delta = \gamma - 1$ dans $\bar{\Delta}$: 0

Exemple A

Avec $\mathbf{K} = \mathbb{C}[t]$ (anneau différentiel)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & \partial^2 + t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{R(\partial)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}}_w = 0, t \geq 0.$$

Trouver les "mouvements impulsionnels".

(Définition: $R(\partial)$ est régulière à l'infini si $R(\sigma^{-1})$ admet une forme de Smith-MacMillan sur $\mathbf{K}((\sigma))$.)

7.5. Structure générale

Méthode: considérer une représentation de Rosenbrock

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D(\partial) & -N(\partial) & 0 \\ Q(\partial) & W(\partial) & -I_p \end{bmatrix}}_{R(\partial)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ u \\ y \end{bmatrix}}_w = 0$$

et déterminer (si elle existe) une factorisation copremière à gauche sur $\mathbf{S} = \mathbf{K} [[\sigma]]$

$$R(\sigma^{-1}) = A^+(\sigma)^{-1} R^+(\sigma).$$

Equation du module impulsionnel M^+

$$R^+(\sigma) \underbrace{\begin{bmatrix} \xi^+ \\ u^+ \\ y^+ \end{bmatrix}}_{w^+}$$

Calculer à partir de ce système de commande impulsionnel les différentes sortes de pôles et zéros à l'infini comme on l'a fait pour les pôles et zéros finis.

7.6. Cas d'une interconnexion

Système M_i :

$$R_i(\partial) w_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Interconnexion \rightarrow

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1(\partial) & 0 \\ 0 & R_2(\partial) \\ J_1 & -J_2 \end{bmatrix}}_{R(\partial)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}}_w = 0$$

\Rightarrow (Bourlès, 2005)

$$R^+(\partial) = \begin{bmatrix} R_1^+(\sigma) & 0 \\ 0 & R_2^+(\sigma) \\ J_1 & -J_2 \end{bmatrix}$$

7.7 Exercices

Exercice 84 Continuer l'exemple A: déterminer tous les types de pôles et de zéros à l'infini en supposant que $u = w_1$, $y = w_4$ et $\xi = [w_2, w_3]^T$.

Exercice 85 Même exercice avec

$$\begin{aligned} D(\partial) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t\partial^3 & \partial^2 \end{bmatrix}, & N(\partial) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (t-1)\partial \end{bmatrix}, \\ Q(\partial) &= \begin{bmatrix} t\partial & t^2\partial \end{bmatrix}, & W(\partial) &= t^2\partial. \end{aligned}$$

Interprétation?

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 15

La solution n'est pas évidente mais son principe est simple. Il suffit de mettre en évidence un idéal de \mathcal{O}_Ω qui ne soit pas de type fini.

(1) Supposons tout d'abord que $\Omega = \mathbb{R}$. Soit la fonction

$$f_n(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)\dots(z-n)}$$

et considérons l'idéal \mathfrak{I} engendré par les f_n ($n \geq 0$). Soit $\mathcal{Z}(f_n)$ l'ensemble des zéros de f_n . On a $\mathcal{Z}(f_n) = \{m \in \mathbb{Z} : m < 0\} \cup \{m \in \mathbb{Z} : m > n\}$. Si $f \in \mathfrak{I}$, il existe un entier N_f tel que $\mathcal{Z}(f)$ contient $\{m \in \mathbb{N} : m \geq N_f\}$. Si \mathfrak{I} est de type fini, engendré par g_1, \dots, g_k , en posant $N = \max_{1 \leq i \leq k} N_{g_i}$, on a pour toute $f \in \mathfrak{I}$ l'inclusion $\{m \in \mathbb{N} : m \geq N\} \subset \mathcal{Z}(f)$ et en particulier $N \in \mathcal{Z}(f)$. Mais f_N est dans \mathfrak{I} et $f_N(N) \neq 0$, une contradiction.

(2) Lorsque $\Omega =]a, b[$ où a et b sont finis, on se ramène au cas précédent en remplaçant f_n par $f_n \circ g$ où $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $t \mapsto \frac{2}{b-a} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)$. Le cas où l'une seulement des quantités a, b est finie s'en déduit de manière évidente.

Corrigé de l'exercice 16

Démonstration du lemme 6

(1) Notons tout d'abord que dans un anneau intègre \mathbf{A} , un élément est une unité si, et seulement si il est inversible à gauche ou à droite, et que dans l'un ou l'autre cas son inverse à gauche et son inverse à droite coïncident. En effet, soit $u \in \mathbf{A}$ inversible à droite. Il existe donc $v \in \mathbf{A}$ tel que $uv = 1$, donc $uvu = u$, donc $u(vu - 1) = 0$, et puisque $u \neq 0$, $vu = 1$.

(2) Soit \mathfrak{a} un idéal principal (bilatère) non nul. Il existe p, p' tels que $\mathfrak{a} = p\mathbf{A} = \mathbf{A}p'$. Puisque $p \in \mathbf{A}p'$, il existe $u \in \mathbf{A}$ tel que $p = up'$; de même, il existe $v \in \mathbf{A}$ tel que $p' = pv$. Donc, $p = upv$. Donc $p\mathbf{A} = upv\mathbf{A}$, et comme $up \in upv\mathbf{A}$, on a $up \in p\mathbf{A}$, par conséquent il existe $w \in \mathbf{A}$ tel que $up = pw$, donc $p = pwv$ et $wv = 1$. Les éléments

w et v sont donc des unités d'après (1); il en va de même pour u , et $p\mathbf{A} = \mathbf{A}p$ est engendré par l'élément invariant p .

La démonstration du théorème 10 est évidente.

Démonstration du corollaire 12

On a $A_1(\mathbf{k}) = \mathbf{K}[\partial]$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{k}[t]$, donc $\mathbf{K} \supset \mathbb{Q}$. D'après le théorème 11 (où il faut remplacer dans (3)(i) " \mathfrak{a} " par " $\mathfrak{a} \neq 0$ "), il suffit de démontrer que \mathbf{K} n'a pas d'idéal propre \mathfrak{a} tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$. Puisque $\mathbf{k}[t]$ est un anneau principal, les idéaux non nuls de $\mathbf{k}[t]$ sont de la forme (f) avec

$$f = f_0 t^n + f_1 t^{n-1} + \dots + f_n, \quad f_0 \neq 0.$$

Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}^{(n)} \subset \mathfrak{a}$, donc $f^{(n)} = n!f_0 \in \mathfrak{a}$. Puisque ce terme est une unité de $\mathbf{k}[t]$, on a $\mathfrak{a} = \mathbf{k}[t]$, et \mathfrak{a} n'est pas propre.

Corrigé de l'exercice 17

(i) Soit $x, x' \in S^{-1}A$. Il existe $s, s' \in S$ et $a, a' \in A$ tels que $x = a/s$, $x' = a'/s'$, donc $x - x' = (sa - s'a')/ss' \in S^{-1}A$, donc $S^{-1}A$ est un groupe abélien. D'autre part, $xx' = (aa')/(ss')$, et $S^{-1}A$ est donc un anneau.

(ii) On pose $S^{-1}\mathfrak{a} = \{a/s, a \in \mathfrak{a}, s \in S\}$. Il s'agit d'un groupe abélien par le même raisonnement que dans (i). Soit $a'/s' \in S^{-1}A$. Alors $(a/s)(a'/s') = (aa')/(ss')$ et $aa' \in \mathfrak{a}$, donc $(a/s)(a'/s') \in S^{-1}\mathfrak{a}$, et cet ensemble est un idéal de $S^{-1}A$.

(iii) Si \mathfrak{a} est principal, il existe $a \in A$ tel que $\mathfrak{a} = Aa$, donc $S^{-1}\mathfrak{a} = (S^{-1}A)(a/1)$ est un idéal principal de $S^{-1}A$, engendré par $a/1$ (image canonique de a dans $S^{-1}A$). Un raisonnement semblable montre que si \mathfrak{a} est inversible, $S^{-1}\mathfrak{a}$ l'est aussi.

(iv) est une conséquence immédiate de (iii).

Corrigé de l'exercice 18

(i) est clair.

(ii): $\mathbb{C}[t]$ est un anneau principal, donc il en va de même de \mathcal{R}_Ω d'après l'exercice 17(iv). Les éléments non inversibles de cet anneau sont ceux qui ont un zéro (en tant que fonctions analytiques) dans Ω . Tout élément de ce type est de la forme $(t - \lambda) f(t)$ où $\lambda \in \Omega$ et $f \in \mathcal{R}_\Omega$, d'où le résultat.

(iii) se démontre comme le corollaire 12.

Corrigé de l'exercice 24

(i) L'homomorphisme induit \bar{f} existe si, et seulement si

$$(C) f(N_1) \subset N_2.$$

Alors $\ker(\bar{f}) = \varphi_1(f^{-1}(N_2))$. Donc, $\ker(\bar{f}) = 0$ si, et seulement si $f^{-1}(N_2) \subset N_1$.

Si $N_2 \subset \text{im}(f)$ alors $f(f^{-1}(N_2)) = N_2$ et $f^{-1}(N_2) \subset N_1 \Leftrightarrow N_2 \subset f(N_1)$. D'après (C), ceci équivaut à $N_2 = f(N_1)$.

(ii) On a $\text{im}(\bar{f}) = \varphi_2(\text{im}(f))$, donc f est un épimorphisme si, et seulement si $\varphi_2(\text{im}(f)) = M_2/N_2$, ce qui signifie que pour tout $x_2 \in M_2$ il existe $x_1 \in M_1$ et $y_2 \in N_2$ tels que $x_2 = y_2 + f(x_1)$, autrement dit $M_2 = N_2 + \text{im}(f)$.

Les exercices 25, 26 et 27 ont été traités en cours.

Corrigé de l'exercice 28

(i) On a, avec $\mathbf{D} = A_1(\mathbb{C})$ et $R = t$, $\mathbf{D}R \subsetneq \mathbf{D}$, donc il existe $x \in \mathbf{D}$ tel que $x \notin \mathbf{D}R$. Sa classe $\bar{x} \pmod{\mathbf{D}R}$, autrement dit son image canonique dans $\mathbf{D}/\mathbf{D}R = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R)$, est $\neq 0$, donc $\text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R) \neq 0$.

(ii) (a) Si $W = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, soit $f \in \ker_W(R\bullet)$. On a $tf(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Donc pour tout $t \neq 0$, $f(t) = 0$, et puisque f est une fonction continue, $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} f(t) = 0$. Donc, $f = 0$. Par conséquent $\ker_W(R\bullet) = 0$.

(b) Si $W = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, soit $f \in \ker_W(R\bullet)$. Soit \mathcal{L} la transformation de Laplace. On a $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d\mathcal{L}(f)}{ds}$. Donc, $\frac{d\mathcal{L}(f)}{ds} = 0$, $\mathcal{L}(f) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), et donc $f = \lambda\delta$. Par conséquent $\ker_W(R\bullet) = \{\lambda\delta : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Sites conseillés:

http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée_de_Laplace

http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée_bilatérale_de_Laplace

Corrigé de l'exercice 43

Les exercices 42 et 44 ont été traités en cours. Le module W de l'exercice 44 est le "cogénérateur canonique".

L'équation $(\partial - \lambda)w = 0$ avec $\lambda \neq 0$ n'a pas de solution non nulle dans $\sum_{n \in \mathbb{N}} kt^n$, qui n'est donc pas cogénérateur.

Corrigé de l'exercice 45

Posons $\mathbf{D} = A_0(\Omega; \mathbb{C})$ et soit $\tau \in \Omega$. Pour tout t tel que $t - \tau \in \Omega$, on a $t - \tau \in \mathbf{D}$ et $\mathbf{D}(t - \tau) \subsetneq \mathbf{D}$. On conclut comme dans l'exercice 28 que, en posant $R = t - \tau$, $\mathbf{D}/\mathbf{D}R = \text{coker}_{\mathbf{D}}(\bullet R) \neq 0$ et que, pour $W = C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, $\ker_W(R\bullet) = 0$. Par conséquent, W n'est pas cogénérateur.

Corrigé de l'exercice 46

(i) Seul le point $t = 0$ est singulier pour l'opérateur $P = t(t\partial - 1)$. On a $a_0 = -t$, $a_1 = t^2$, d'où $\text{ord}_0(a_0) = 1$, $\text{ord}_0(a_1) = 2$. On a d'après le théorème de Komatzu (Théorème 41) $\dim_{\mathbb{C}} \ker_{\mathcal{B}(\Omega)}(P\bullet) = 1 + 2 = 3$.

(ii) En construisant le polygone de Newton en 0 on obtient $\sigma_0 = 1$. Par conséquent $\ker_{\mathcal{B}(\Omega)}(P\bullet) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.

(iii) On a $t(t\partial - 1)f = 0$ si, et seulement si

$$(t\partial - 1)f = \lambda\delta \quad (*)$$

($\lambda \in \mathbb{C}$) : voir correction de l'exercice 28.

Résolvons cette seconde équation (*).

L'équation homogène est $(t\partial - 1)f = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow f(t) = \mu t$.

On peut chercher les solutions-distribution de (*) à support positif en utilisant la transformée monolatérale de Laplace (http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée_de_Laplace). On obtient

$$-\frac{d}{ds} (s\hat{f}(s)) - \hat{f}(s) = \lambda \Leftrightarrow -s\frac{d\hat{f}}{ds} - 2\hat{f} = \lambda$$

L'équation homogène est $-s\frac{d\hat{f}}{ds} - 2\hat{f} = 0$ et a pour solution $\hat{f}(s) = \frac{c}{s^2}$. On résout l'équation complète par la méthode de "variation de la constante" c :

$$\frac{d\hat{f}}{ds} = -2\frac{c}{s^3} + \frac{1}{s^2} \frac{dc}{ds}$$

et en remplaçant on trouve $\frac{dc}{ds} = \lambda s$ d'où $c = \lambda \frac{s^2}{2} + \nu$ et finalement $\hat{f}(s) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\nu}{s^2}$. On en déduit $f(t) = \frac{\lambda}{2}\delta(t) + \nu t\Upsilon(t)$.

Au total, $\ker_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} (R(\partial)\bullet) = \mathbb{C}t + \mathbb{C}t\Upsilon + \mathbb{C}\delta$.

Ce serait plus compliqué avec des hyperfonctions qui ne seraient pas des distributions...! (Mais cela ne sera pas demandé!!!...)

Corrigé de l'exercice 47

(i) C'est clair (voir correction de l'exercice 28).

(ii) Tous les points sont réguliers, donc $\ker_{\mathcal{B}(\Omega)} (R(\partial) \bullet) = 0$ d'après le théorème de Komatsu (Théorème 41).

(iii) Par conséquent, le $A_1(\mathbb{C})$ -module $\mathcal{B}(\Omega)$ n'est pas cogénérateur d'après le théorème 31.

Cet exercice montre bien que, malgré le fait que $A_1(\mathbb{C})$ est un anneau ayant de "bonnes propriétés" au plan algébrique (anneau de Dedekind simple), il ne convient pas pour étudier les systèmes à coefficients variables en Automatique.

Corrigé de l'exercice 48

En construisant le polygone de Newton on trouve $\sigma_0 = 2$ (voir corrigé de l'exercice 46). Par conséquent $\ker_{\mathcal{B}(\Omega)} (P\bullet) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$ d'après le théorème de Komatzu (d'où la nécessité d'utiliser des hyperfonctions).

Corrigé de l'exercice 57

L'exercice 56 a été corrigé en cours.

Les polynômes en ∂ $D(\partial) = t\partial^2 + 1$ et $N(\partial) = 1 + t$ n'ont pas de facteur commun, par conséquent le module $[y, u]_{\mathbf{D}}$ est sans torsion et le système est commandable.

Corrigé de l'exercice 58

On applique la condition de Silverman & Meadows avec

$$F = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$\Gamma = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t + t^3 \\ 1 & t^3 & t^6 - 3t^2 \\ 1 & t^2 & t^4 - 2t \end{bmatrix}$$

et $\det(\Gamma) = t(t-2)(t^3+t-1)$. Ce polynôme a 5 racines qui forment un ensemble discret S . Le système est donc commandable.

Corrigé de l'exercice 60

L'exercice 59 est facile.

Soit donc

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{bmatrix}.$$

(i) Si σ est un paramètre constant,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma \\ -\sin \sigma & -\cos \sigma \end{bmatrix}$$

et $\det(\Gamma) = -1$, donc le système est commandable.

(ii) Si $\sigma = t$,

$$\Gamma = \left[G \quad \left(F - \frac{d}{dt} I_2 \right) G \right] = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 0 \end{bmatrix},$$

donc le système n'est pas commandable!!!

Correction de l'exercice 70

On montre que

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction de l'exercice 71

(a) On montre que
$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 4 & s-4 & 0 \\ 2 & -1 & s-2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s-2) & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix}$. Correction détaillée:

$$(sI_3 - A) = \begin{bmatrix} s - 12 & 6 & 2 \\ -18 & s + 9 & 3 \\ -18 & 9 & s + 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 \\ c_2 - 3c_3 \\ \equiv \end{array} \begin{bmatrix} s & 0 & 2 \\ 2s & s & 3 \\ 0 & -3s & s + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} l_2 - 2l_1 \\ \equiv \end{array} \begin{bmatrix} s & 0 & 2 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -3s & s + 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} c_1 \leftrightarrow c_3 \\ l_1 \leftrightarrow l_2 \\ \equiv \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & s & 0 \\ s + 3 & 0 & -3s \end{bmatrix} \begin{array}{l} c_3 + sc_1 \\ \equiv \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 3 \\ s + 3 & 0 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$l_3 - (s+3)l_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} \implies A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. Correction détaillée:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & 3 & -3 \\ 2 & s+6 & -13 \\ 1 & 4 & s-8 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 4 & s-8 \\ s-1 & 3 & -3 \\ 2 & s+6 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s-1 & 3-4(s-1) & -3-(s-1)(s-8) \\ 2 & s+6-8 & -13-2(s-8) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4s+7 & s^2-9s+11 \\ 0 & s-2 & 2s-3 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 2s-3 \\ 0 & -4s+7 & s^2-9s+11 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s-2 & 2s-3 \\ -4s+7 & s^2-9s+11 \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -4s+7 & s^2-s-3 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 1 & s-2 \\ s^2-s-3 & -4s+7 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^2-s-3 & -4s+7-(s-2)(s^2-s-3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $-4s+7-(s-2)(s^2-s-3) = -(s-1)^3$.

D'où $(sI - A) \equiv \text{diag}(1, 1, (s-1)^3)$ et

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.7 Correction de l'exercice 84

(1) On obtient la **factorisation copremière à gauche** sur $\mathbb{C}[t][[\sigma]]$

$$\begin{bmatrix} -1 & \partial^2 + t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D^+(\sigma)}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} -\sigma^2 & 1 + \sigma^2 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sigma^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{R^+(\sigma)}$$

(2) **Pôles non commandables à l'infini:** on a

$$U(\sigma) R^+(\sigma) V^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} \text{diag}(1, 1, \sigma^2) & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$U(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, V^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} t & t & 1 + t\sigma^2 & 1 + t\sigma^2 \\ 1 & 1 & \sigma^2 & \sigma^2 \\ 1 & 0 & \sigma^2 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $R(\partial)$ is régulière) à l'infini, et sa forme de Smith-MacMillan à l'infini est

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma^{-2}, \sigma^{-2}, \sigma^2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit

$$R^+(\sigma) w^+ = 0$$

l'équation du "système impulsionnel" M^+ , where $w^+ = \left[(w_i^+)_{1 \leq i \leq 4} \right]^T$.

Son équation équivaut à

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(1, 1, \sigma^2) & 0 \end{bmatrix} v^+ = 0$$

avec

$$v^+ = V(\sigma)w^+ = \begin{bmatrix} -\sigma^2 & t\sigma^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w^+. \quad (12)$$

Le sous-module de torsion de M^+ est $[v_3^+]_{\mathbf{S}} \cong \mathbf{S}/(\sigma^2)$, où

$$v_3^+ = w_1^+ - t w_2^+ - w_4^+.$$

Le **mouvement impulsif** $\mathfrak{B}_{\infty,a}$ is the \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par la variable $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1 - t \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_4$ et $\mathfrak{B}_{\infty,a} \cong \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\dot{\delta}$.

(3) On fait des permutations de lignes et de colonnes de manière à obtenir la **représentation de Rosenbrock standard**. D'où la nouvelle matrice

$$R^+(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 + \sigma^2 t & 0 & -\sigma^2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Pôles à l'infini: $M^+ / [u^+]_{\mathbf{S}}$. Quotienter par $[u^+]_{\mathbf{S}}$ revient à supprimer la 3ème colonne. Il reste la matrice

$$\begin{bmatrix} D^+(\sigma) & Z^+(\sigma) \\ Q^+(\sigma) & Y^+(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sigma^2 t & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sigma^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

(4) **Zéros invariants à l'infini:** $\mathcal{T} \left(M^+ / [y^+]_{\mathbf{S}} \right)$. Quotienter par $[u^+]_{\mathbf{S}}$ revient à supprimer la 4ème colonne. Il reste la matrice

$$\begin{bmatrix} D^+(\sigma) & -N^+(\sigma) \\ Q^+(\sigma) & W^+(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sigma^2 t & 0 & -\sigma^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix},$$

(5) **Pôles non observables à l'infini:** $M^+ / [u^+, y^+]_{\mathbf{S}}$. On supprime les colonnes 3 et 4.

$$\begin{bmatrix} D^+(\sigma) \\ Q^+(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sigma^2 t & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc pas de pôles non commandable à l'infini.