Exercice I.1

On considère un système du second ordre stable décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_2\,y(t) = b_0\,\dot{u}(t) + b_1\,u(t),$$

dans le cas où les pôles sont complexes conjugués. On suppose que $b_0 = 1$.

Q-1 Montrer que sa réponse indicielle est maximale en un temps t_m dont la valeur dépend du signe de $b_1 - a_1/2$.

Q-2 Montrer que le dépassement est dans tous les cas égal à (en %)

$$D\% = 100\,[k(\varsigma\omega_0\lambda + \omega_p) - \lambda]\,e^{-\varsigma\omega_0 t_m}\,\sin\omega_p t_m.$$

Q-3 Appliquer ce qui vient d'être calculé au système décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 1,5\,\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + b_1\,u(t),$$

pour $b_1 = 0,5$, $0,75$ et 1. Vérifier les résultats obtenus en utilisant Matlab.

Correction

Q-1 Dans le cas où les pôles d'un système du deuxième ordre sont complexes, sa réponse indicielle est donnée par

$$y(t) = k\left[1 - e^{-\varsigma\omega_0 t}\,(\cos\omega_p t + \lambda\sin\omega_p t)\right]\Upsilon(t). \tag{1}$$

Calculons sa dérivée. On a

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= k\left[-e^{-\varsigma\omega_0 t}\,(-\omega_p\,\sin\omega_p t + \lambda\,\omega_p\,\cos\omega_p t) + \varsigma\,\omega_0\,e^{-\varsigma\omega_0 t}\,(\cos\omega_p t + \lambda\,\sin\omega_p t)\right]\Upsilon(t),\\ &= k\,e^{-\varsigma\omega_0 t}\,[(\varsigma\,\omega_0 - \lambda\,\omega_p)\cos\omega_p t + (\omega_p + \lambda\,\varsigma\,\omega_0)\sin\omega_p t]\,\Upsilon(t).\end{aligned}$$

Or, on a

$$\lambda = \frac{\varsigma\,\omega_0\,k - b_0}{k\,\omega_p} \Rightarrow \lambda\,\omega_p = \varsigma\,\omega_0 - \frac{b_0}{k} \Rightarrow \varsigma\,\omega_0 - \lambda\,\omega_p = \frac{b_0}{k},$$

ce qui conduit à

$$\dot{y}(t) = [\cos\omega_p t + k\,(\varsigma\,\omega_0\,\lambda + \omega_p)\,\sin\omega_p t]\,\Upsilon(t) \tag{2}$$

puisqu'ici $b_0 = 1$. En outre, on a

$$\begin{aligned}k\,(\varsigma\,\omega_0\,\lambda + \omega_p) &= k\left(\varsigma\,\omega_0\,\frac{\varsigma\,\omega_0\,k - 1}{k\,\omega_0\,\sqrt{1-\varsigma^2}} + \omega_0\,\sqrt{1-\varsigma^2}\right),\\ &= k\,\omega_0\left(\frac{\varsigma^2\,\omega_0\,k - \varsigma}{k\,\omega_0\,\sqrt{1-\varsigma^2}} + \sqrt{1-\varsigma^2}\right),\\ &= k\,\omega_0\frac{\varsigma^2\,\omega_0\,k - \varsigma + k\,\omega_0(1-\varsigma^2)}{k\,\omega_0\,\sqrt{1-\varsigma^2}},\\ &= \frac{k\,\omega_0 - \varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}.\end{aligned}$$

En utilisant alors

$$\omega_0 = \sqrt{a_2},\ \varsigma = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \text{ et } k = \frac{b_1}{a_2}\,,$$

on obtient

$$k\,(\varsigma\,\omega_0\,\lambda + \omega_p) = \frac{b_1\sqrt{a_2}/a_2 - a_1/(2\sqrt{a_2})}{\sqrt{1 - a_1^2/(4a_2)}} = \frac{b_1 - a_1/2}{\sqrt{a_2 - a_1^2/4}} = \frac{2\,b_1 - a_1}{\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}}$$

et la dérivée de la réponse indicielle s'écrit finalement

$$\dot{y}(t) = \left[\cos\omega_p t + \frac{2\,b_1 - a_1}{\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}}\,\sin\omega_p t\right]\Upsilon(t).$$

La réponse indicielle atteint un maximum lorsque sa dérivée s'annule, c'est-à-dire, pour $t \geq 0$, lorsque

$$\cos\omega_p t + \frac{2\,b_1 - a_1}{\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}}\,\sin\omega_p t = 0\,\cdot$$

Si $b_1 = a_1/2$, cette dernière équation se réduit à $\cos\omega_p t = 0$, et le premier maximum est atteint pour $t_m = \pi/(2\omega_p)$. Si $b_1 \neq a_1/2$, l'équation en question est équivalente à

$$\tan\omega_p t = \frac{\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}}{a_1 - 2\,b_1}\,,$$

et on distingue alors deux cas selon le signe de $b_1 - a_1/2$:

$b_1 - a_1/2 > 0$	$t_m = \frac{1}{\omega_p}\left(\pi + \arctan\frac{\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}}{a_1 - 2\,b_1}\right)$
$b_1 - a_1/2 < 0$	$t_m = \frac{1}{\omega_p}\,\arctan\frac{\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}}{a_1 - 2\,b_1}$

Q-2 Quel que soit le cas considéré, on a $\dot{y}(t_m) = 0$, soit d'après (2)

$$\cos\omega_p t_m = -k\,(\varsigma\,\omega_0\,\lambda + \omega_p)\,\sin\omega_p t_m.$$

L'expression (1) de $y(t)$ appliquée en $t = t_m$ fournit alors

$$y(t_m) = k\left\{1 - [\lambda - k\,(\varsigma\,\omega_0\,\lambda + \omega_p)]\,e^{-\varsigma\omega_0 t_m}\,\sin\omega_p t_m\right\}.$$

Par conséquent, on a $D\% = 100\,D$ où

$$D = \frac{|y(t_m) - k|}{k} = [k\,(\varsigma\,\omega_0\,\lambda + \omega_p) - \lambda]\,e^{-\varsigma\omega_0 t_m}\,\sin\omega_p t_m,$$

où l'on choisit pour t_m l'une des trois expressions données ci-dessus, selon la valeur et le signe de $2\,b_1 - a_1$.

Q-3 On a ici $a_1 = 1,5$ et $a_2 = 1$, et on calcule selon les cas

$$b_1 = 0,5 \Rightarrow b_1 - \frac{a_1}{2} < 0 \;\Rightarrow\; t_m = 1,83 \text{ s et } D\% = 35,9\%,$$
$$b_1 = 0,75 \Rightarrow b_1 - \frac{a_1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; t_m = 2,37 \text{ s et } D\% = 14,9\%,$$
$$b_1 = 1 \Rightarrow b_1 - \frac{a_1}{2} > 0 \;\Rightarrow\; t_m = 2,92 \text{ s et } D\% = 7,9\%.$$

En utilisant les lignes Matlab

```
s=tf('s');
figure; hold;
for i=0 :2
      b1=0.5+0.25*i;
      sys=(s+b1)/(s^2+1.5*s+1);
      step(sys)
end
```

on obtient les tracés suivants, qui confirment les résultats obtenus.

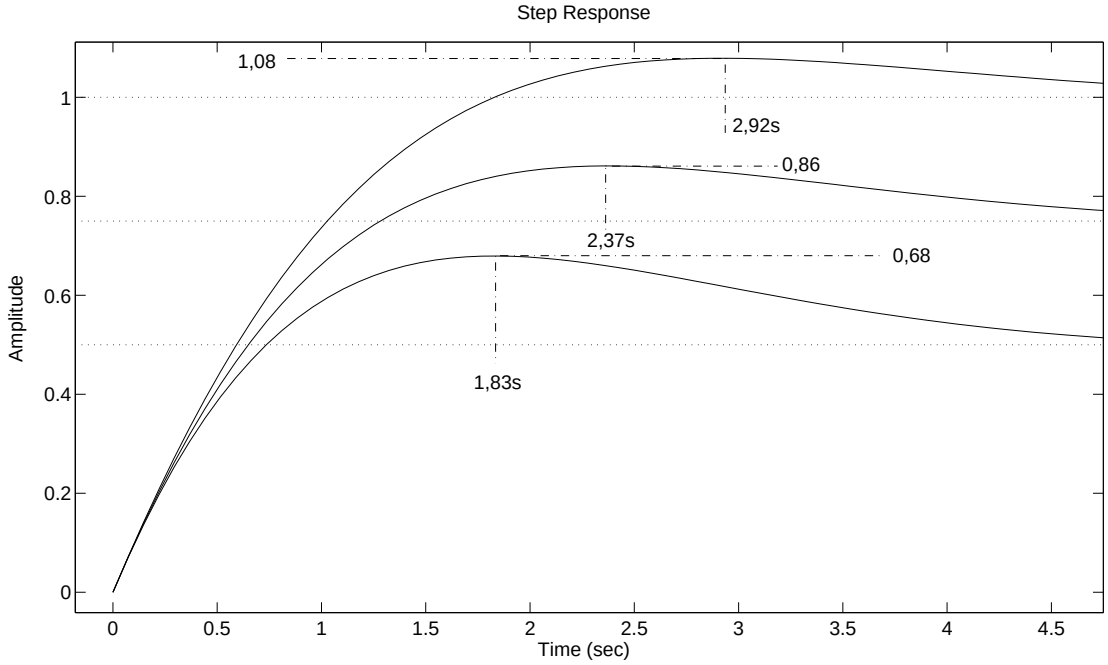

FIGURE 1 – *Réponse indicielle selon la valeur de* b_1.