Exercice II.3

On considère le système de fonction de transfert $P(s) = 1/s^2$ associé au régulateur de fonction de transfert $K(s) = s/(s+1)$.

Q-1 D'après le critère de Routh-Hurwitz, le système bouclé est-il stable ?

Q-2 Tracer de manière approximative le lieu de Nyquist de $L(s) = P(s)K(s)$.

Q-3 D'après le critère de Nyquist , le système bouclé est-il stable ?

Q-4 Certains auteurs énoncent le critère de Nyquist en utilisant un axe imaginaire dentelé différent de celui utilisé dans cet ouvrage à la figure **??** : au lieu de contourner par la gauche les pôles que possède $L(s)$ sur l'axe imaginaire, il est préconisé de le faire *par la droite*, et de ne compter pour n_P et n_K que les pôles à partie réelle *strictement* positive. En appliquant au présent exemple le critère ainsi obtenu, déterminer si celui-ci conduit à un résultat correct.

Correction

Q-1 En posant

$$\mathrm{P}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \text{ et } \mathrm{K}(s) = \frac{R(s)}{S(s)}\,,$$

avec $B(s) = 1$, $A(s) = s^2$, $R(s) = s$, $S(s) = s + 1$, on obtient

$$A(s)\,S(s) + B(s)\,R(s) = s\,(s^2 + s + 1),$$

et d'après le critère de Routh-Hurwitz le système est instable en boucle fermée.

Q-2 Traçons le lieu de Bode du système en boucle ouverte qui a pour fonction de transfert

$$\mathrm{L}(s) = \mathrm{P}(s)\,\mathrm{K}(s) = \frac{1}{s\,(s+1)}.$$

Il possède deux pôles en 0 et -1. Par conséquent, les points de cassure du diagramme asymptotique, au nombre de deux, seront situés en $\omega = 0$ et $\omega = 1$ rad/s. Ils possèdent les caractéristiques suivantes :

ω (rad/s)	0	1
Variation de pente (dB/dec)	-20	-20
Variation de phase ($^\circ$)	-90	-90

On en déduit aisément le tracé du diagramme asymptotique ainsi que celui du diagramme de Bode lui-même, représentés à la figure 1.

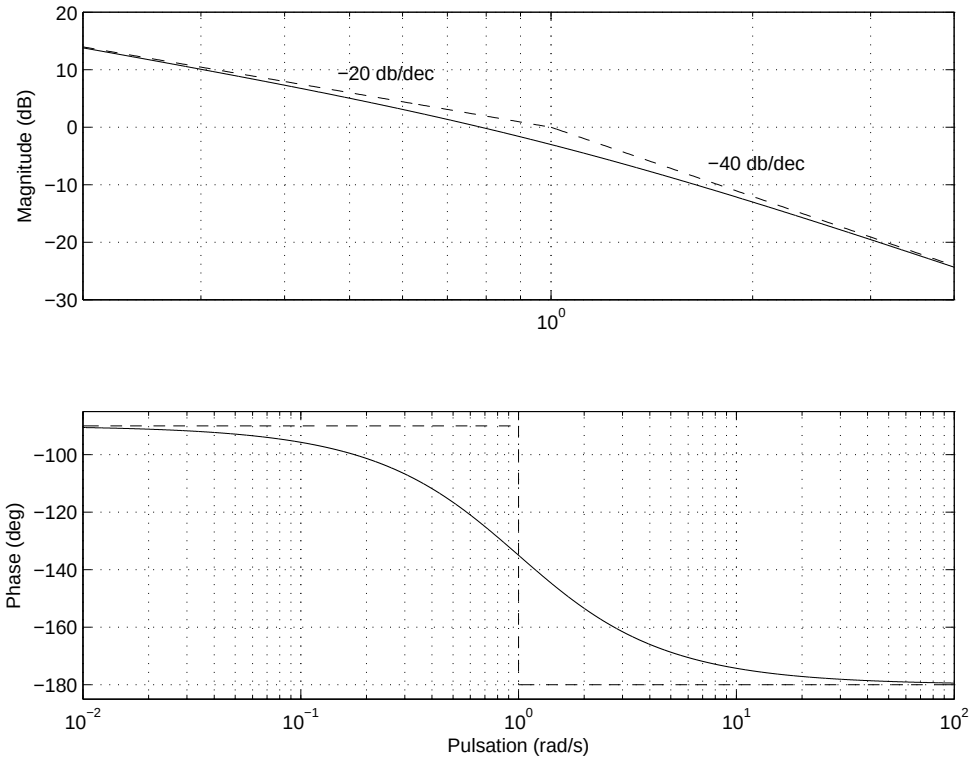

FIGURE 1 – *Diagramme de Bode du système.*

On peut alors déduire de ce diagramme le lieu de Nyquist du système, à condition de connaître la place de l'asymptote que possède ce lieu, puisque $|\mathrm{L}(i\omega)| \underset{\omega\to 0}{\to} +\infty$ et $\arg \mathrm{L}(i\omega) \underset{\omega\to 0}{\to} -90°$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned} |\mathrm{L}(i\omega)| &= \frac{1}{i\omega\,(1+i\omega)} \\ &= \frac{1}{-\omega^2+i\omega} \\ &= \frac{-\omega^2-i\omega}{\omega^4+\omega^2} \\ &= \frac{-\omega-i}{\omega^3+\omega}\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\Re(\mathrm{L}(i\omega)) = \frac{-1}{\omega^2+1} \Rightarrow \lim_{\omega\to 0^+} \Re(\mathrm{L}(i\omega)) = -1^+.$$

On en déduit alors le lieu de Nyquist du système, tracé à la figure 2

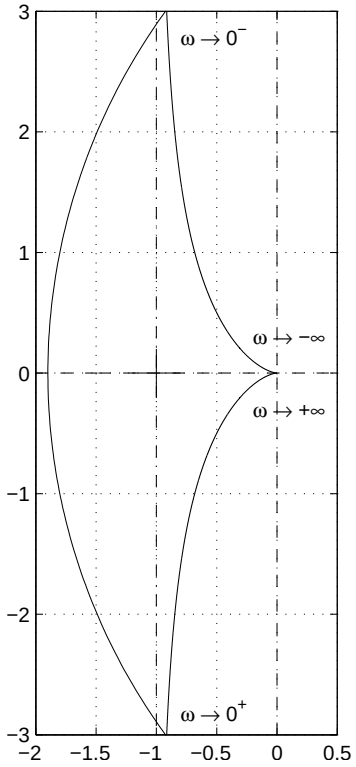

FIGURE 2 – *Lieu de Nyquist du système*

Q-3 On a $n_P = 2$ et $n_K = 0$, d'où $n_P + n_K = 2$. Le lieu de Nyquist effectue $+1$ tour autour du point critique, ce qui indique d'après le critère de Nyquist que le système est instable en boucle fermée.

Q-4 En utilisant un tel axe imaginaire dentelé, le lieu de Nyquist boucle par la droite entre $\omega = 0^-$ et $\omega = 0^+$, et il effectue donc 0 tour autour du point critique. Par ailleurs, le système ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive. Le "critère de Nyquist" proposé conduirait donc à la conclusion erronée que le système est stable en boucle fermée.