H. Bourlès

Professeur du Conservatoire National des Arts et Métiers

Approche H_∞ et μ-synthèse

1 - Introduction

On peut probablement dire que « l'approche H_∞ » est, dans le domaine de la commande robuste, le sujet qui a donné lieu au plus grand nombre de publications et à la plus grande quantité d'efforts depuis le milieu des années 80. Cela n'est pas par hasard, car c'est une façon très naturelle de formuler la problématique de la robustesse, comme on s'efforcera de le montrer dans ce chapitre ; les résultats que cette approche permet d'obtenir sont également très convaincants, et nous espérons que l'exemple traité dans la Section 5 plaidera dans ce sens.

Tout a commencé par un article de Zames [Zam 81], paru en 1981, et suivi par d'autres articles écrits par, ou en collaboration avec le même auteur [Zam 83], [Fra 84a], [Fra 84b]. Ces articles ont été mal compris par beaucoup quand ils sont parus, et ils ne concernaient pas le problème de robustesse, mais plutôt celui de rejet de perturbation. C'est Kimura qui, en 1984, a formulé le premier le problème de commande robuste en terme H_∞ [Kim 84], bien que sa position du problème ne soit guère différente de celle proposée par Doyle et Stein dès 1981 [Doy 81] (la nouveauté résidant dans le fait que l'utilisation explicite du cadre H_∞ a permis à Kimura de résoudre le problème de synthèse, grâce à la technique d'interpolation dite de Nevanlinna-Pick). L'article de Francis et Doyle [Fra 87a], ainsi que le livre de Francis [Fra 87b], tous deux parus en 1987, ont fait une très bonne synthèse des travaux parus jusqu'à cette date, et les ont unifiés grâce à l'importante notion de "problème standard" (qui est due à Doyle [Doy 84]). Le livre de Vidyasagar [Vid 85], datant de 1985, constitue également une référence de base, encore très actuelle à beaucoup d'égards.

La plupart de ces idées, au plan de l'Automatique, sont pratiquement contenues dans le Théorème des Petits Gains, qui remonte à 1966 [Zam 66a]. Quant aux aspects proprement mathématiques, ils sont fort anciens : les bases théoriques concernant les espaces H_p, dits "espaces de Hardy", sont connues depuis les années 30 [Har 30]. La méthode d'interpolation de Nevanlinna-Pick, dont il a été question plus haut, est connue depuis les années 20 [Nev 19], [Pic 16]. On peut trouver une très bonne synthèse des résultats mathématiques principaux concernant les espaces de Hardy dans [Gar 81] (une introduction beaucoup plus élémentaire pouvant être trouvée dans [Vid 85] ou [Rud 66]).

La résolution du "problème standard" a progressé de manière très importante en 1988 avec l'algorithme de Glover-Doyle [Glo 88], qui utilise la représentation d'état, et qui donne une solution très proche de la commande LQG. Il faut noter que Safonov et ses collaborateurs [Saf 87] étaient déjà très proches de cette solution en 1987. La notion de valeur singulière structurée, due à Doyle [Doy 82] permet de traiter les problèmes structurés avec beaucoup moins de conservatisme que H_∞ Parmi les ouvrages présentant de manière synthétique le point de vue actuel concernant cette approche, on doit citer en premier lieu le livre de Maciejowski [Mac 89], et en complément [Sto 92a]. Nous conseillerons également la lecture du livre de Doyle et ses collaborateurs [Doy 92], bien qu'il n'utilise pas la représentation d'état (et qu'il soit, en ce sens, un livre "d'avant 1988"), pour le très bon éclairage qu'il apporte sur les problèmes de synthèse H_∞ et de μ-synthèse. Le "tutorial paper" [Kwa 93] est à bien des égards remarquable. Enfin, en langue française, on peut citer le polycopié [Duc 99].

2 - Analyse de la robustesse, des performances et de leur compromis. Loop shaping

Nous nous proposons dans cette Section d'exposer des éléments d'analyse de la robustesse d'un système bouclé, de formaliser le problème des performances, et à partir de là d'étudier le compromis robustesse/performances. Pour une meilleure clarté de l'exposé, on commencera toujours par étudier le cas des systèmes **monovariables**, puis on indiquera les modifications qu'on doit apporter dans le cas **multivariable**.

Les éléments exposés dans cette Section ne sont pas tous spécifiques à une approche H_∞ de la robustesse : bien des notions sont générales et applicables à un système bouclé quel qu'il soit. Tout automaticien ayant un minimum d'expérience sait bien qu'une loi de commande très performante est toujours peu robuste. Moins bien on connaît un système, plus la loi de commande qu'on lui applique doit être robuste -- par définition même de la robustesse --, faute de quoi on risque d'engendrer une boucle fermée instable. En outre, il est assez clair qu'un système mal connu doit être gouverné avec prudence -- c'est-à-dire avec des performances relativement médiocres. C'est donc bien que **robustesse** et **performance** sont des termes antithétiques. Par conséquent, l'automaticien est amené à essayer de gérer de la meilleure façon possible -- compte tenu, notamment, de l'imprécision du **modèle** dont il dispose -- le compromis fondamental robustesse/performance. Le but de cette Section est d'exposer les principaux éléments d'analyse permettant de bien réaliser ce compromis et d'en donner une expression dans le "formalisme H_∞ ". Les notions mathématiques utilisées dans le texte sont définies dans l'Annexe. On y trouvera également des théorèmes de stabilité de base, mais énoncés dans un contexte général, tels que le Théorème des Petits Gains, le Critère de Nyquist et le Critère du Cercle multivariables, etc.

2.1 - Equations du système contrôlé [Doy 81]

Considérons le schéma de régulation(1) de la figure 1. Sur ce schéma, u et y désignent l'entrée et la sortie du système, d_u et d_y des perturbations agissant sur l'entrée et la sortie respectivement, et b est le bruit de mesure ; ***P*** et ***K*** désignent le système à régler (ou, plus précisément, le modèle dont on dispose) et le régulateur.

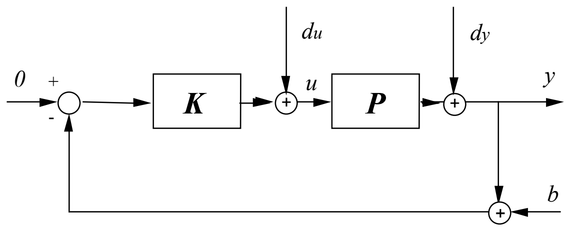


Figure 1 *- Schéma de régulation*

Les signaux apparaissant sur la figure 1 sont supposés être des signaux temporels, appartenant à des espaces "L_2 étendus" L_{2e} (voir Annexe). D'autre part, les systèmes ***P*** et ***K*** seront considérés comme étant des opérateurs de L_{2e} dans L_{2e}. Ces opérateurs seront toujours supposés causaux, et, pour l'instant, linéaires et stationnaires. Comme cela est bien connu, ils peuvent alors être caractérisés par leurs réponses impulsionnelles (ou, dans le cas multivariable, leurs matrices de réponses impulsionnelles) P et K, ou encore par leurs fonctions (ou matrices) de transfert $\hat{P}$ et $\hat{K}$ ($\hat{(.)}$ désignant la transformée de Laplace de (.)) . Dans tout ce texte, les fonctions (ou matrices) de transfert seront supposées propres [Kai 80].

Les équations du système bouclé de la figure 1 s'écrivent facilement dans le domaine de Laplace. De manière à ne pas alourdir les écritures, et par abus de langage, on notera de la même manière, dans ce qui suit, un signal temporel et sa transformée de Laplace, **sauf en cas d'ambiguïté**, la transformée de Laplace étant alors surmontée d'un accent circonflexe. Avec ces conventions, on obtient les équations suivantes dans le cas monovariable :

(1) Ce schéma ne comporte pas de signal de consigne. En effet, on ne s'intéresse ici qu'aux propriétés de la boucle fermée.

$$y = S\, d_y + P\, S\, d_u - T\, b$$
$$u = S\, d_u - K\, S\,(b + d_y) \qquad (1)$$

avec

$$S = \frac{1}{1 + P\,K} \quad \text{et} \quad T = \frac{P\,K}{1 + P\,K} \qquad (3.2)$$

Les fonctions de transfert S et T ci-dessus s'appellent respectivement la **fonction de sensibilité** et la **fonction de sensibilité complémentaire**. Cette dernière dénomination est due au fait que

$$S + T = 1 \qquad (3)$$

Ces deux fonctions de sensibilité s'expriment uniquement en fonction de la **fonction de transfert de la boucle ouverte** L, définie par

$$L = P\,K \qquad (4)$$

Dans le cas multivariable, les matrices de transfert P et K ne commutent pas. On doit donc distinguer la **matrice de transfert de la boucle ouverte en entrée**, L_e et la **matrice de transfert de la boucle ouverte en sortie**, L_s. Ces fonctions de transfert sont définies par :

$$L_e = K\,P, \quad L_s = P\,K \qquad (5)$$

De même, on sera amené à distinguer les matrices de sensibilité en entrée et en sortie, S_e et S_s, ainsi que leurs matrices complémentaires respectives, T_e et T_s, définies par :

$$S_i = (I + L_i)^{-1}, \quad T_i = (I + L_i)^{-1}\, L_i$$

avec $i = e$ ou s et où I désigne la matrice identité de dimension convenable. On a évidemment :

$$S_i + T_i = I. \qquad (6)$$

Avec ces notations, les équations de la boucle fermée s'écrivent :

$$y = S_s\, d_y + S_s\, P\, d_u - T_s\, b$$
$$u = S_e\, d_u - S_e\, K\,(b + d_y) \qquad (7)$$

2.2 - Robustesse (approche linéaire)

Il convient maintenant de soigneusement distinguer le **système à régler** et le **modèle** qu'on en a. Le système à régler est considéré comme étant un opérateur causal $\tilde{\boldsymbol{P}}$, de L_{2e} dans L_{2e}. Cet opérateur est distinct de $\boldsymbol{P}$, et n'est généralement pas linéaire, contrairement à $\boldsymbol{P}$. Mais dans le cadre de ce paragraphe, nous supposerons $\tilde{\boldsymbol{P}}$ linéaire et stationnaire, donc représentable par sa fonction (ou matrice) de transfert $\tilde{P}$.

2.2.1 - Marges de stabilité (cas monovariable)

Nous n'envisagerons ici que le cas monovariable. Supposons que le lieu de Nyquist de L soit celui de la figure 2. Le système bouclé "nominal", c'est-à-dire celui constitué du modèle $\boldsymbol{P}$ rebouclé par le régulateur $\boldsymbol{K}$, est supposé stable.

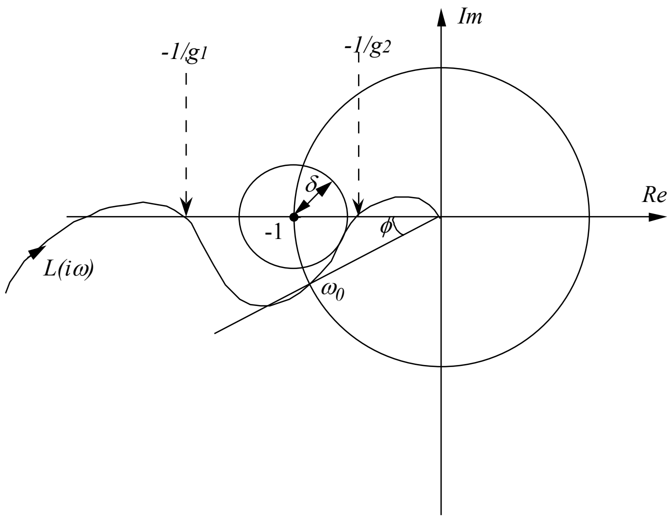


Figure 2 *- Lieu de Nyquist de L*

Nous conviendrons d'appeler **marge de gain** l'intervalle ouvert $Mg =]g_1, g_2[$; la signification de cette marge est la suivante : pour tout réel g appartenant à Mg, $\boldsymbol{K}$ stabilise $\tilde{\boldsymbol{P}}$ lorsque $\tilde{P}$ est de la forme $g\,P$.

La **marge de phase** Mp est l'angle ϕ, compris entre 0 et 2π, tel que $\arg[L(i\omega_0)] = \pi + \phi$ modulo 2π, où ω_0 est la pulsation au gain unité, c'est-à-dire satisfaisant l'égalité $|L(i\omega_0)| = 1$. S'il y a plusieurs pulsations au gain unité ω_j, correspondant à des arguments $\pi + \phi_j$ modulo 2π, on doit bien entendu prendre $\phi = \min\{\phi_i\}$. On pourrait appeler de manière plus pertinente cette marge la **marge de retard de phase** (*Mrp*); et l'on pourrait également définir de la même manière la **marge d'avance de phase** (*Map*), en remplaçant ci-dessus $\pi + \phi_j$ par $\pi - \phi_j$. La signification de la marge de retard (resp. d'avance) de phase ϕ est la suivante : pour tout angle ψ tel que $0 < \psi < \phi$, $\boldsymbol{K}$ stabilise $\tilde{\boldsymbol{P}}$ lorsque $\tilde{P}$ est de la forme $e^{-i\psi}P$ (resp. $e^{i\psi}P$).

La **marge de retard** *Mr* [And 89], [Bou 91] est, comme on va le voir, une notion très importante. Elle se définit de la manière suivante : *Mr* est la borne supérieure des retards τ tels que $\boldsymbol{K}$ stabilise $\tilde{\boldsymbol{P}}$ lorsque $\tilde{\boldsymbol{P}}$ est de la forme $\boldsymbol{R_\tau P}$ ($\boldsymbol{R_\tau}$ désignant l'opérateur de retard : voir Annexe). La fonction de transfert de $\boldsymbol{R_\tau}$ est $e^{-\tau s}$; cet opérateur produit donc un retard de phase $\tau\,\omega$ à la pulsation ω. Supposons que (comme sur la figure 2), il n'y ait qu'une seule pulsation au gain unité ω_0. Dans ce cas, d'après le Critère de Nyquist, *Mr* se calcule suivant la formule :

$$Mr = \frac{Mrp}{\omega_0}$$

Supposons maintenant qu'il existe plusieurs pulsations au gain unité ω_j, j=1, 2,..., et que l'on ait $\arg(L(i\omega_j)) = \pi + \phi_j$ (modulo 2π), avec $0 < \phi_j < 2\pi$. Dans ce cas, *Mr* se calcule par :

$$Mr = \min\left\{ \frac{\phi_j}{\omega_j}\ , j=1, 2, ...\right\} \tag{3.8}$$

La marge de retard est utile pour plusieurs raisons [Bou 92]. Tout d'abord, une boucle de régulation contient bien souvent des retards parasites, en particulier lorsque la commande est à temps discret. Mais un retard peut également être une assez bonne modélisation de **dynamiques négligées**, lorsque celles-ci ont des pôles non oscillants. Supposons en effet que ces dynamiques négligées n'aient que des pôles réels, correspondant à des constantes de temps τ_1, τ_2, etc. Autrement dit, on a

$$\tilde{P}(s) = P(s)\ \frac{1}{1+\tau_1 s}\ \frac{1}{1+\tau_2 s}\ \cdots$$

On a alors, aux pulsations ω telles que $|\tau_j\,\omega| << 1$:

$$\tilde{P}(i\omega) \approx P(i\omega)\,(1 - \tau\, i\omega)$$

où τ est la somme des constantes de temps τ_j . Par conséquent,

$$\tilde{P}(i\omega) \approx P(i\omega)\, e^{-i\omega\tau}$$

On peut donc conclure qu'une marge de retard suffisante assure une bonne robustesse vis-à-vis de dynamiques négligées ne présentant pas de résonances.

Marge de module : Les marges de gain, de phase et de retard ne suffisent pas pour assurer une bonne robustesse. Il peut arriver, en effet, que ces marges soient bonnes, mais que le lieu de Nyquist de L passe très près du point -1. Dans ce cas, une petite erreur de modèle (se traduisant par un autre effet, dans le plan de Nyquist, qu'une variation du gain ou de la phase) peut déstabiliser la boucle. Il est donc essentiel que la distance du lieu de Nyquist de L au point -1 soit suffisante (de l'ordre de 0.5 par exemple). C'est cette distance que nous appellerons, avec I. Landau, la marge de module (Mm) (cette marge a souvent été appelée marge de gain-phase). Elle est égale à la distance δ indiquée sur la figure 2, et elle se calcule par :

$$Mm = \inf \{ \, |1 + L(i\omega)| : \ \omega \in \Re \ \}$$

On a donc d'après (2) :

$$Mm = \frac{1}{\| S \|_\infty} \tag{9}$$

où $\|S\|_\infty$ désigne la norme de S dans l'espace H_∞ (voir Annexe).

Nous verrons au paragraphe suivant que la marge de module garantit une certaine robustesse vis-à-vis de non linéarités non modélisées. D'autre part, des minorants de la marge de gain et de la marge de phase peuvent être calculés à partir de la marge de module ; en effet, un raisonnement géométrique élémentaire montre que

$$\left] \frac{1}{1 + Mm} \, , \frac{1}{1 - Mm} \right[\subset Mg \tag{10}$$

$$Mp \geq 2 \arcsin(Mm/2) \tag{11}$$

(avec $Mp = Mrp$ ou Map).

Marge de module complémentaire : Il est courant de tracer dans le plan de Nyquist les "λ-cercles" (ou "M-cercles") permettant de déterminer géométriquement le facteur de résonance de la fonction de sensibilité complémentaire T ; on obtient

alors « l'abaque de Hall ». Ces cercles ont pour centre $-\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}$ et pour rayon $\frac{\lambda}{|\lambda^2-1|}$.
Un tel cercle est indiqué sur la figure 3 (avec λ > 1).

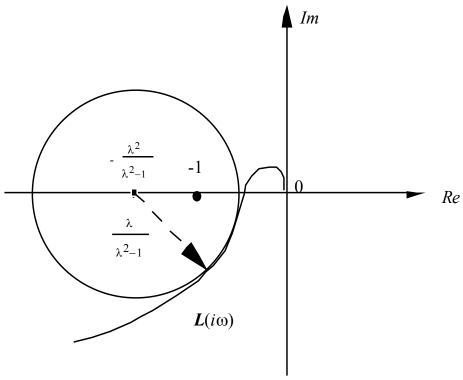


Figure 3 - *λ-cercle*

Nous conviendrons de définir la marge de module complémentaire *Mmc* comme étant la borne inférieure des quantités 1/λ telles que le lieu de Nyquist de *L* reste extérieur au λ-cercle (avec λ > 1). On a donc :

$$Mmc = \frac{1}{\|T\|_\infty} \tag{12}$$

La comparaison des formules (9) et (12) justifie la dénomination de marge de module complémentaire. On peut montrer géométriquement que :

$$]1 - Mmc,\ 1 + Mmc[\ \subset Mg \tag{13}$$

$$Mp \geq 2\ \arcsin(Mmc/2) \tag{14}$$

avec $Mp = Mrp$ ou Map.

2.2.2 - Robustesse vis-à-vis de dynamiques négligées

On vient de voir plus haut que (du moins dans le cas monovariable) la marge de retard pouvait être une bonne mesure de la robustesse vis-à-vis de dynamiques négligées ne présentant pas de résonances. Cette marge devient un critère insuffisant lorsque les dynamiques négligées présentent des pics de résonance, ce qui est souvent le cas ; par exemple, les structures mécaniques ont généralement des modes souples très résonnants dans les hautes fréquences.

a) Envisageons tout d'abord le **cas monovariable**, et supposons que la fonction de transfert du système à régler soit de la forme

$$\tilde{P} = (1 + E)\, P \qquad (15)$$

où E est une fonction de transfert, appelée **erreur de modèle multiplicative**. Cette erreur **n'est pas nécessairement stable**(2) , mais nous supposerons qu'il existe une fonction de transfert W_1, stable (c'est-à-dire appartenant à RH_∞ -- voir en Annexe la définition de cet ensemble) telle que

$$|E(i\omega)| < |\, W_1(i\omega)|,\ \forall\ \omega \in \Re \qquad (16)$$

Nous supposerons de plus que $\tilde{P}$ a le même nombre de pôles à partie réelle strictement positive que P. Cette dernière hypothèse mise à part, l'inégalité (16) (où W_1 est connue) sera la seule information disponible sur l'erreur de modèle. On ne connaît donc pas le lieu de Nyquist de $\tilde{L} = \tilde{P}\ K$, mais on sait qu'à la pulsation ω, l'écart entre ce lieu et celui de L est majoré par $|W_1(i\omega)\ P(i\omega)\ K(i\omega)| = |W_1(i\omega)\ L(i\omega)|$. Autrement dit, $\tilde{L}(i\omega)$ appartient au disque ouvert de centre $L(i\omega)$ et de rayon $|W_1(i\omega)\ L(i\omega)|$ (voir figure 4).

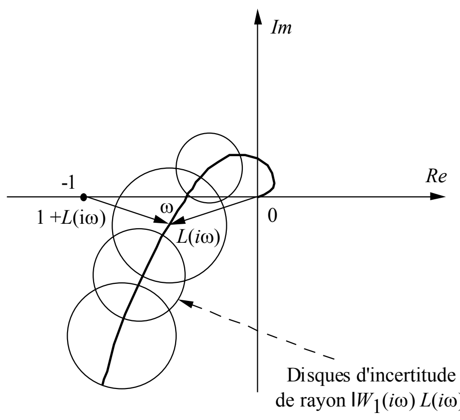


Figure 4 *- Lieu de Nyquist de L et disques d'incertitude*

Compte tenu des hypothèses qui ont été prises, la condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{K}$ stabilise $\boldsymbol{\tilde{P}}$ **pour toutes les erreurs de modèle considérées**

(2) Nous commettons ici un abus de langage, car E n'est que la fonction de transfert de l'erreur de modèle $\boldsymbol{E}$. De même, la stabilité se rapporte à l'opérateur $\boldsymbol{E}$, et non à sa fonction de transfert E... Par commodité, nous ferons bien souvent ce type d'abus de langage.

est, d'après le Critère de Nyquist, que le point -1 n'appartienne à aucun disque d'incertitude, c'est-à-dire

$$|1 + L(i\omega)| \geq |W_1(i\omega)\, L(i\omega)|$$

Cette condition équivaut évidemment à

$$\|W_1\, T\|_\infty \leq 1 \tag{17}$$

Prenons un exemple élémentaire illustrant ce résultat : supposons que $P(s) = \frac{1}{s - 1}$ et $K(s) = 2$. Il est immédiat que ***K*** stabilise ***P***. Supposons d'autre part que $\tilde{P}(s) = \frac{1}{s - 1.1}$. Alors, la relation (15) est vérifiée avec $E(s) = \frac{0.1}{s - 1.1}$. Notons bien que cette erreur de modèle est instable. En revanche, l'inégalité (16) est vérifiée avec, par exemple, $W_1(s) = \frac{0.11}{s + 1.1}$, où W_1 est stable. Puisque $\tilde{P}$ a le même nombre de pôles instables que P, il suffit, pour que ***K*** stabilise $\tilde{\boldsymbol{P}}$, que l'inégalité (17) soit satisfaite ; on vérifie aisément que tel est le cas. Cette condition n'est que **suffisante** ici, puisqu'on a affaire à seulement une erreur de modèle particulière parmi toutes celles qui vérifient (16).

b) Considérons maintenant le cas **multivariable**. Il n'est alors pas équivalent de supposer que l'erreur de modèle multiplicative se trouve en entrée ou en sortie du modèle ; en effet, ces deux opérateurs sont alors représentées par des **matrices** de transfert, qui cessent de commuter.

Envisageons tout d'abord le cas d'une erreur multiplicative en sortie E_S. Cela signifie qu'on a la relation :

$$\tilde{P} = (I + E_S)\, P \tag{18}$$

Comme précédemment, l'erreur E_S n'est pas supposée stable, mais on suppose qu'il existe une fonction de transfert W_1 appartenant à RH_∞ telle que

$$\overline{\sigma}\left(E_S\left(i\,\omega\right)\right) < \left|W_1\left(i\,\omega\right)\right|,\ \forall\,\omega \in \Re$$

On obtient alors le résultat suivant [Vid 85] : une condition nécessaire et suffisante pour que ***K*** stabilise ***P*** pour toutes les erreurs multiplicatives E_S vérifiant l'inégalité (19) et telles que $\tilde{P}$ a le même nombre de pôles à partie réelle strictement positive que P, est

$$\|W_1\, T_S\|_\infty \leq 1 \tag{20}$$

Ce résultat se démontre, comme dans le cas monovariable, à partir du Critère de Nyquist (Théorème 7, Annexe).

Il conviendrait d'étudier les autres cas qui peuvent se présenter : erreur de modèle multiplicative en entrée, erreur de modèle additive, etc. Plutôt que de donner une liste de résultats, nous allons maintenant énoncer un théorème général, s'appliquant à toutes ces situations. Pour plus de clarté, nous commencerons par formuler différemment le résultat précédent, de manière à amener naturellement le formalisme qui va suivre.

Remarquons que E_S peut se mettre sous la forme $\Delta\ W_1$, où Δ est une matrice de transfert, éventuellement instable, mais vérifiant l'inégalité

$$\overline{\sigma}(\Delta(i\omega)) < 1, \ \ \forall \omega \in \Re \tag{21}$$

D'autre part, le schéma de régulation (où, pour plus de simplicité, on n'a pas représenté les perturbations) peut se mettre sous la forme de la figure 5.

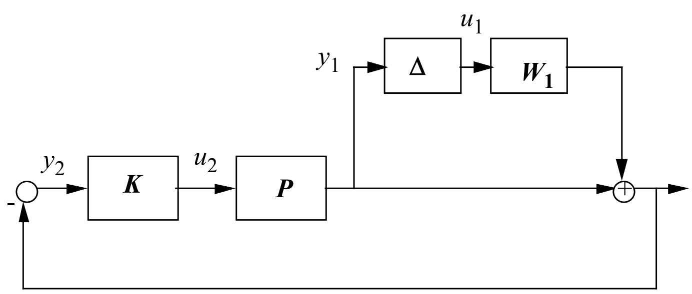


Figure 5 *- Schéma de régulation avec erreur de modèle en sortie*

Ce schéma peut se mettre sous la forme indiquée sur la figure 6, que nous appellerons **schéma standard**. Cette notion jouera un rôle clé dans toute la suite.

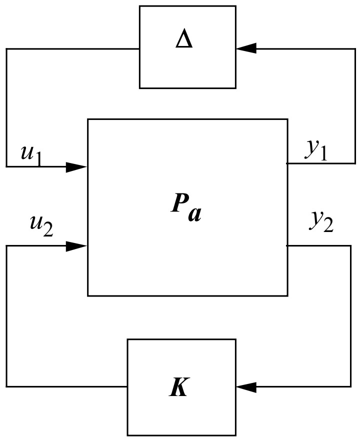


Figure 6 *- Schéma standard*

Le système $\boldsymbol{P_a}$ ci-dessus est appelé le **système augmenté**. Sa matrice de transfert est dans le cas étudié ici : $P_a = \begin{pmatrix} 0 & P \\ -W_1\, I & -P \end{pmatrix}$.

On notera $F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K})$ l'opérateur d'entrée u_1 et de sortie y_1 lorsque $\Delta = 0$, et $F_b(P_a, K)$ la matrice de transfert correspondante (puisqu'on est ici dans un cadre linéaire stationnaire). On notera également $F_h(\boldsymbol{P_a}, \Delta)$ l'opérateur d'entrée u_2 et de sortie y_2 lorsque $\boldsymbol{K} = 0$, et $F_h(P_a, \Delta)$ la matrice de transfert correspondante. Dans le cas général où $P_a = \begin{pmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P_{a21} & P_{a22} \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} F_b(P_a, K) &= P_{a11} + P_{a12}\, K\, (I - P_{a22}\, K)^{-1}\, P_{a21} \\ F_h(P_a, \Delta) &= P_{a21}\, \Delta\, (I - P_{a11}\, \Delta)^{-1}\, P_{a12} + P_{a22} \end{aligned} \tag{22}$$

Dans le cas spécifique étudié ici, on a donc $F_h(P_a, \Delta) = -\,(W_1\, \Delta + I)\,\mathrm{P} = -\,\tilde{P}$, et $F_b(P_a, K) = -\,P\,K\,(I + P\,K)^{-1}\,W_1 = -\,W_1\,T_s$.

Les transformations F_b et F_h[3] ci-dessus sont appelées des **transformations linéaires fractionnaires**. De façon générale, notons $B_1(P_\mathrm{a})$ l'ensemble des matrices de transfert rationnelles Δ vérifiant les deux propriétés suivantes :

---

[3] L'indice *b* (resp. *h*) indique que P_a a été rebouclé par le bas (resp. par le haut). Dans la littérature anglo-saxonne, ces indices deviennent *l* (lower) et *u* (upper).

(i) Δ satisfait à l'inégalité (21)

(ii) $F_h(P_a, \Delta)$ et $F_h(P_a, 0)$ ont le même nombre de pôles à partie réelle strictement positive.

On peut démontrer, à partir du Théorème 7, le théorème général suivant [McF 90] :

Théorème 1 : "Supposons que $\boldsymbol{K}$ stabilise $F_h(\boldsymbol{P_a}, 0)$; alors, $\boldsymbol{K}$ stabilise $F_h(\boldsymbol{P_a}, \Delta)$ pour tout Δ dans $B_1(P_a)$, si et seulement si

$$\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq 1." \tag{3.23}$$

Dans le cas envisagé plus haut, la condition (23) équivaut à (20). Considérons maintenant, par exemple, le cas d'une incertitude multiplicative en entrée. On a donc

$$\tilde{P} = P\,(I + E_e)$$

où E_e satisfait à l'inégalité

$$\bar{\sigma}(E_e(i\omega)) < |W_1(i\omega)|, \;\; \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{24}$$

En faisant le même raisonnement que précédemment, et en appliquant le Théorème 1, on obtient le résultat suivant : une condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{K}$ stabilise $\boldsymbol{P}$ pour toutes les erreurs multiplicatives E_e vérifiant l'inégalité (24) et telles que $\tilde{P}$ a le même nombre de pôles à partie réelle strictement positive que P, est

$$\|W_1\, T_e\|_\infty \leq 1 \tag{25}$$

2.3 - Robustesse (approche non linéaire)

L'objet de ce paragraphe est d'envisager le cas où, bien que le modèle $\boldsymbol{P}$ soit linéaire, le système à régler lui-même, $\tilde{\boldsymbol{P}}$, est non linéaire. Le théorème de base pour l'étude de la stabilité du système contrôlé (compte tenu de l'erreur de modèle) ne peut plus, dans ce cas, être le Critère de Nyquist. Les deux théorèmes qui peuvent être utilisés sont le Théorème des Petits Gains et le Critère du Cercle (voir Annexe).

2.3.1 - Robustesse dans la bande passante

a) Considérons tout d'abord le cas monovariable, et supposons que le "système bouclé nominal" ait une **marge de module** *Mm*. C'est donc que le lieu de Nyquist de L ne rencontre pas le disque noté en Annexe $D(\frac{1}{1+Mm}, \frac{1}{1-Mm})$, et qui est géométriquement le disque ouvert de diamètre $[-(1+Mm), -(1-Mm)]$. Supposons d'autre part que $\tilde{\boldsymbol{P}}$ soit de la forme : $\tilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P}\ \Phi$, où Φ est un opérateur pouvant être non linéaire, et qui est donc situé **en entrée** du modèle. Le système bouclé "perturbé" (mais en fait celui qui correspond à la réalité) peut donc être représenté par un schéma tel que celui de la figure 7.

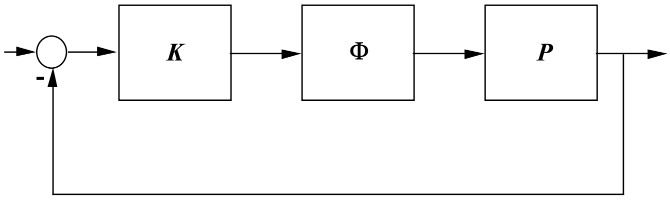


***Figure** 7 - Système bouclé perturbé (opérateur **Φ** en entrée de **P**)*

D'après le Critère du Cercle (Théorème 10, Annexe), ce système bouclé perturbé est stable pour tout Φ appartenant au secteur $S(\frac{1}{1+Mm}, \frac{1}{1-Mm})$. On retrouve donc le minorant (10) pour la marge de gain, et, en utilisant (89), le minorant (11) pour la marge de phase, compte tenu du fait qu'en posant $a = \frac{1}{1+Mm}$ et $b = \frac{1}{1-Mm}$, on a

$$\arccos\left(\frac{1+a\,b}{a+b}\right) = 2\arcsin(Mm/2) \qquad (26)$$

Du fait que, dans le cas monovariable, ***P*** et ***K*** commutent, la stabilité du système bouclé perturbé est encore garantie, pour tout **Φ** appartenant au secteur $S(\frac{1}{1+Mm}, \frac{1}{1-Mm})$, si **Φ** est situé **en sortie** de ***P*** (et cela bien que **Φ** et ***P*** ne commutent pas si **Φ** est non linéaire).

b) Le raisonnement qui vient d'être fait sur la marge de module peut l'être également sur la marge de module complémentaire : tout revient alors à remplacer $D(\frac{1}{1+Mm}, \frac{1}{1-Mm})$ par $D(1-Mmc, 1+Mmc)$ et $S(\frac{1}{1+Mm}, \frac{1}{1-Mm})$ par $S(1-Mmc, 1+Mmc)$.

c) Dans le cas **multivariable**, on sera amené à distinguer une marge de module en entrée, Mm_e, et la marge de module en sortie, Mm_s. Ces marges seront définies suivant :

$$Mm_i = \frac{1}{\| S_i \|_\infty} \tag{27a}$$

avec $i = e$ ou s. Comme dans le cas monovariable, on montre facilement que l'existence de cette marge revient à dire que l'image par L_i de l'axe imaginaire ne rencontre pas le disque $D((1 + Mm_i)^{-1}I, (1 - Mm_i))^{-1}I)$. D'après le Critère du Cercle, si un système bouclé nominal présente une marge de module en entrée (resp. en sortie) Mm_e (resp. Mm_s), alors le système bouclé n'est pas déstabilisé par un opérateur **Φ**, situé en entrée (resp. en sortie) de ***P***, et appartenant au secteur $S((1 + Mm_i)^{-1}I, (1 - Mm_i))^{-1}I)$, avec $i = e$ (resp. $i = s$).

Comme type particulier d'opérateur, on peut envisager un opérateur diagonal **Φ** = diag(g_1, g_2, ...), où les g_i sont de simples gains. D'après ce qui précède, si le système bouclé présente une marge de module en entrée (resp. en sortie) Mm_e (resp. Mm_s), le système bouclé n'est pas déstabilisé si **Φ** est situé en entrée (resp. en sortie) de ***P*** et si les g_i appartiennent à l'intervalle $]\frac{1}{1 + Mm_i}, \frac{1}{1 - Mm_i}[$, avec $i = e$ (resp. $i = s$). Cet intervalle est donc un minorant de la "marge de gain multivariable en entrée (resp. en sortie)" [Saf 77].

On peut également envisager pour **Φ** un opérateur diagonal de déphasage, ayant pour matrice de transfert diag($e^{i\phi_1}$, $e^{i\phi_2}$, ...). Alors, d'après (89) et (26), le système bouclé perturbé est stable tant que **Φ**, situé en entrée (resp. en sortie) de ***P***, vérifie $|\phi_j| < 2 \arcsin(Mm_i/2)$, avec $i = e$ (resp. $i = s$), $\forall j$. Cette quantité est donc un minorant de la "marge de phase multivariable en entrée (resp. en sortie)".

d) Ce raisonnement peut également être fait en utilisant les marges de module complémentaire en entrée et en sortie, Mmc_e et Mmc_s, définies par

$$Mmc_i = \frac{1}{\| T_i \|_\infty} \tag{27b}$$

avec $i = e$ ou s. Cette fois, l'existence de cette marge revient à dire que l'image de l'axe imaginaire par L_i ne rencontre pas le disque $D((1 - Mmc_i)I, (1+Mmc_i)I)$. Nous laissons le soin au lecteur d'en tirer les conséquences, en indiquant simplement qu'on trouve finalement la généralisation directe, pour les marges de gain et de phase multivariables, des formules (13) et (14).

Nous allons maintenant énoncer la "version non linéaire" du Théorème 1, qui permet de généraliser et de résumer tous les résultats de ce paragraphe. Considérons de nouveau le schéma standard de la figure 6, où cette fois Δ est un opérateur **stable**, mais **pouvant être non linéaire**. En revanche, le système augmenté $\boldsymbol{P_a}$ et le régulateur $\boldsymbol{K}$ sont supposés linéaires. Notons B_{snl1} l'ensemble des opérateurs Δ, stables et de gain strictement inférieur à 1 (voir Annexe), et B_{s1} l'ensemble des opérateurs Δ, linéaires, stationnaires et de dimension finie, dont la matrice de transfert Δ vérifie $\|\Delta\|_\infty<1$. Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 9 de l'Annexe :

Théorème 2 : "Supposons que $\boldsymbol{K}$ stabilise $F_h(\boldsymbol{P_a}, 0)$; alors, $\boldsymbol{K}$ stabilise $F_h(\boldsymbol{P_a}, \Delta)$ pour tout Δ dans B_{snl1}, si et seulement si l'inégalité (23) est vérifiée. Cette condition nécessaire et suffisante reste vraie si, dans l'énoncé, on remplace B_{snl1} par B_{s1}."

Insistons bien sur la différence entre les Théorèmes 1 et 2 : le Théorème 1, fondé sur le Critère de Nyquist, n'impose pas à l'erreur Δ d'être stable. C'est pourquoi ce théorème permet de traiter l'exemple suivant l'inégalité (17), ce qui ne serait pas possible avec le Théorème 2 (du moins en employant la même démarche). C'est l'inconvénient de ce dernier théorème, qui est lui fondé sur le Théorème des Petits Gains, et dont l'avantage réside dans le fait qu'il permet de traiter des problèmes non linéaires.

Considérons par exemple le système régi par l'équation différentielle

$$\dot{x} = A\,x + D\,f(x,t) + B\,u \tag{28}$$

où le terme $D\,f(x,t)$ est une erreur de modèle non linéaire. On suppose les matrices A, B, et D connues. La commande est choisie de la forme $u = K\,x$, où le gain K du retour d'état est tel que la matrice $A + B\,K$ ait toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche ouvert. Enfin, on suppose que la fonction f est mesurable et est telle qu'il existe un réel $\alpha<1$ pour lequel $|f(x, t)| \le \alpha\,|x|$ (quels que soient t et x). Soit alors Δ l'opérateur de L_{2e} dans L_{2e} défini par : $(\Delta\,x)(t) = f(x(t),t)$. Il est immédiat que $\gamma(\Delta)<1$. D'autre part, posons $y_1 = x$, $y_2 = x$, $u_1 = \Delta\,y_1$, $u_2 = K\,y_2$.
L'équation (28) s'écrit

$$\dot{x} = A\,x + D\,u_1 + B\,u_2$$

Le système augmenté $\boldsymbol{P_a}$, d'entrées u_1 et u_2 et de sorties y_1 et y_2, a donc pour matrice de transfert :

$$P_a = \begin{pmatrix} (s\,I - A)^{-1} D & (s\,I - A)^{-1} B \\ (s\,I - A)^{-1} D & (s\,I - A)^{-1} B \end{pmatrix}$$

D'autre part, le système bouclé est maintenant sous la forme du schéma standard de la figure 6. On peut donc appliquer le Théorème 2. En utilisant (22), on obtient comme condition suffisante de stabilité :

$$\|G\|_\infty \leq 1$$

où G est la matrice de transfert définie par $G(s) = (s\,I - A - B\,K)^{-1}\,D$.

2.4 - Performances

Considérons, dans le cas monovariable, le système d'équations (1).

2.4.1 - Rejet de la perturbation sur la sortie

Pour simplifier l'exposé, supposons tout d'abord que seule la perturbation d_y est présente. Alors, la première performance qu'on doit demander à la régulation est d'assurer un bon **rejet de cette perturbation**. Autrement dit, on souhaite que d_y ait une faible influence sur y. Cela sera vérifié à condition que la fonction de transfert entre d_y et y, à savoir la fonction de sensibilité S, soit suffisamment faible en module, aux fréquences où la perturbation d_y est notable.

Supposons par exemple (ce qui est le cas le plus classique) que d_y soit une perturbation de type basse fréquence (telle une perturbation en échelons suffisamment espacés). Alors, $|S(i\omega)|$ doit être très faible dans les basses fréquences. D'après (2), ceci sera réalisé si la fonction de transfert de la boucle ouverte L a un module très grand dans les basses fréquences. Cette fonction de transfert doit donc posséder un pôle à l'origine (ou voisin de celle-ci). Si le système à régler ***P*** n'est pas intégrateur, il faut donc que le régulateur ***K*** le soit.

De façon générale, on supposera qu'on peut définir une fonction de transfert stable W_2, telle que le rejet de la perturbation d_y est correctement effectué si :

$$|W_2(i\omega)\,S(i\omega)| \leq 1,\ \forall\ \omega.$$

Le système bouclé nominal doit évidemment être stable, donc S doit appartenir à H_∞. La condition ci-dessus équivaut par conséquent à :

$$\|W_2\,S\|_\infty \leq 1 \tag{3.29}$$

L'hypothèse faite ci-dessus est, notons-le, assez contraignante, puisqu'elle interdit de choisir une "pondération fréquentielle" W_2 pour laquelle $S(i\omega)$ tende vers 0 dans les basses fréquences. On obtiendrait en effet ce comportement en choisissant W_2 avec un pôle à l'origine, par exemple $W_2(s) = \frac{k}{s}$, où k est un gain correctement ajusté, de manière à obtenir la bande passante adéquate. Un tel choix n'est pas possible, car cette fonction de transfert W_2 n'appartient pas à H_∞. On sera donc amené à "stabiliser" cette fonction de transfert, en la remplaçant par exemple par $W_2(s) = \frac{k}{s+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$ est "suffisamment petit" pour que, dans la bande passante qui nous intéresse pour le rejet de perturbation, $W_2(s)$ se comporte comme $\frac{k}{s}$.

Equivalence avec un problème de stabilité robuste :

La condition (29), caractérisant le type de performance envisagé ici, est de la même forme que la condition (25), qui caractérise la robustesse vis-à-vis d'une erreur de modèle multiplicative, et qui est appelée condition de "stabilité robuste", dans le sens où elle se rapporte à la stabilité du système bouclé perturbé. Mais on peut pousser plus loin l'analogie, et montrer que la condition de performance (29) est véritablement équivalente à une condition de stabilité robuste. En effet, considérons le système bouclé perturbé de la figure 8.

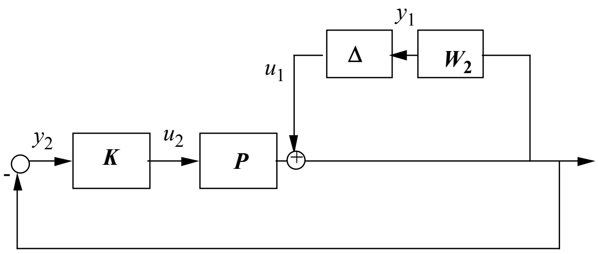


Figure 8 - *Système bouclé perturbé associé au problème de rejet de perturbation sur la sortie*

En utilisant le Théorème 2, on montre immédiatement que ce système bouclé perturbé est stable pour tout Δ dans B_{s1}, si et seulement si la condition (29) est satisfaite.

De manière générale, tout problème de performance pouvant se mettant sous la forme $\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq 1$, est, d'après le Théorème 2, équivalent à un problème de stabilité robuste. Dans le cas présent, on a $P_a = \begin{pmatrix} W_2 & W_2 P \\ -I & -P \end{pmatrix}$.

2.4.2 - Atténuation de l'effet de d_u sur y

Il peut aussi advenir que la perturbation d_u de (1) soit présente. D'autre part, l'entrée du (ou des) actionneur(s) en saturation se traduit par un effet qui peut se représenter grossièrement par une telle perturbation. D'après (1), cette perturbation d_u n'affectera pas trop gravement la sortie y, si la fonction de transfert $P\ S$ a un module qui reste suffisamment faible aux fréquences où agit cette perturbation. Dans le même esprit que ci-dessus, on sera donc amené à définir une fonction de transfert stable W_3 telle que l'effet de d_u sur y soit suffisamment atténué si :

$$\|W_3\ P\ S\|_\infty \leq 1 \tag{3.30}$$

Une telle contrainte de performance a également pour effet d'empêcher une simplification entre un pôle presque instable de P et un zéro de K. Dans le cas d'un pôle franchement instable, une telle simplification signifierait que la stabilité interne du système bouclé nominal n'est pas respectée (voir Annexe). Or, la plupart des méthodes de synthèse, et en particulier la méthode H_∞ que nous verrons plus loin, assurent la stabilité interne, et rendent donc impossible une telle simplification. Celle-ci devient toutefois possible dès lors que le pôle de P concerné, tout en étant stable, est à la limite de stabilité. Un tel cas peut se produire notamment lorsque le système à régler présente des modes oscillants peu amortis. Un mode très oscillant se traduit, dans le lieu de Nyquist de P, par une grande boucle. Si K simplifie ce mode, cette boucle n'apparaît plus dans le lieu de Nyquist de L. Ceci n'est bien sûr vrai que pour le système nominal. Supposons maintenant que le mode en question soit mal connu : alors la simplification pôle/zéro n'a plus lieu avec précision quand on considère le vrai système et non plus son modèle, donc la boucle réapparaît, avec une phase qui n'est pas maîtrisée. Il peut donc en résulter une instabilité du système bouclé, si cette boucle entoure le point -1.

En d'autres termes, une contrainte telle que (30) permet d'obtenir une certaine robustesse vis-à-vis d'une incertitude sur les modes du système qui sont proches de l'instabilité.

Cette contrainte est de la même forme que (29), avec une pondération fréquentielle $W'_2 = W_3\ P$. Elle est donc équivalente à une condition de stabilité robuste. Une difficulté se pose toutefois ici lorsque P est instable, puisque (comme on le verra plus précisément dans la Section 2) les pondérations fréquentielles doivent toujours être stables. Mais si l'on suppose que P n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire, on peut déterminer une fonction de transfert P', stable et telle que pour tout ω, $|P'(i\omega)| = |P(i\omega)|$: P' est l'unique fonction de transfert stable telle que $P'(s)\ P'(-s) = P(s)\ P(-s)$. La contrainte (1.30), correctement modifiée, se met alors sous la forme (29), avec $W'_2 = W_3\ P'$, et cette fois W'_2 est stable. Dans le cas où P a des pôles sur l'axe imaginaire, on se ramènera au cas précédent en les stabilisant légèrement, dans le même esprit que ce qui a été fait plus haut à propos de W_2 lorsque cette pondération a un pôle à l'origine.

2.4.3 - Atténuation de l'effet de b sur u

Il est très important que la régulation soit conçue de telle façon que le bruit de mesure b ne provoque pas une agitation trop grande de la commande. Dans le cas contraire, un premier effet néfaste qu'on peut observer est une fatigue des actionneurs. D'autre part, l'effet du bruit, s'il est trop important, peut faire entrer très souvent la commande en saturation (puisque les actionneurs saturent toujours au-delà d'une certaine amplitude) ; on sort alors du régime linéaire, et la boucle fermée peut devenir instable, surtout si le système à régler est lui-même instable.

On définira donc une nouvelle fonction de transfert stable W_4, telle que l'effet de b sur u sera convenablement atténué (ou, pour le moins, ne sera pas trop amplifié), si l'on a

$$\|W_4\, K\, S\|_\infty \leq 1 \tag{31}$$

Ce problème de performance est équivalent au problème de stabilité robuste du système bouclé de la figure 9. On a dans ce cas $P_a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_4 & -P \end{pmatrix}$.

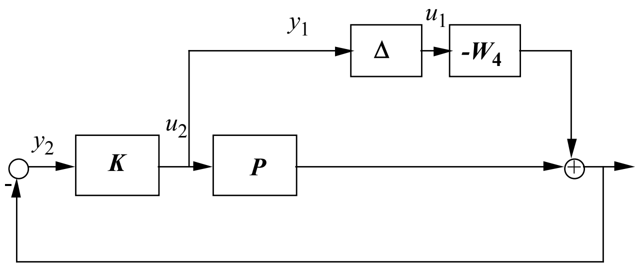


Figure 9 *- Système bouclé perturbé associé au problème d'atténuation de l'effet sur la commande du bruit de mesure*

2.5 - Bilan des conditions obtenues et "loop shaping"

Dans le cas monovariable, faisons maintenant le bilan des conditions obtenues :

- Tout d'abord, pour obtenir une bonne "robustesse dans la bande passante", il faut une **marge de module** suffisante ; certaines non linéarités parasites situées dans un secteur sont alors tolérées (voir figure 7), et d'après (10) et (11), de bonnes marges de gain et de phase sont alors garanties. La marge de module est directement liée à $\|S\|_\infty$ par la relation (9).

Une condition nécessaire pour que la marge de module soit suffisante est évidemment que la marge de phase soit elle-même suffisante. Cela implique qu'au voisinage de la pulsation au gain unité ω_0 (quand celle-ci est unique), $\arg(L(i\omega))$ ne doit pas être voisin de $-\pi$ (modulo 2π). Supposons L stable et à minimum de phase ; alors, d'après la relation de Bode (voir par exemple [Fre 88]), ceci sera vérifié à condition que la pente du gain de $L(i\omega)$ ne soit pas voisine de - 40 dB par décade au voisinage de ω_0. S'il y a plusieurs pulsations au gain unité ω_j, $j = 1, 2, ...$, cette condition sur la pente du gain devra être satisfaite au voisinage de chaque pulsation ω_j. Considérons le cas le plus classique où le gain de $L(i\omega)$ est une fonction décroissante de ω : alors la marge de phase sera bonne (voisine de 90°) si au voisinage de ω_0 (et sur un intervalle de fréquences suffisamment grand), la pente du gain de $L(i\omega)$ est voisine de -20 dB par décade. De façon générale, il est montré dans [Doy 81] que pour avoir une bonne marge de phase, le gain de $L(i\omega)$ ne doit pas varier trop vite au voisinage de la (ou des) pulsation(s) au gain unité, cette contrainte étant encore renforcée dans le cas où L est à non minimum de phase.

- De bonnes marges de gain, de phase et de module sont **nécessaires**, mais **non suffisantes** pour assurer une bonne robustesse, et on a vu au § 2.2.1 l'importance de la **marge de retard**. Une fois une bonne marge de phase assurée, la marge de retard sera suffisante si la pulsation au gain unité ω_0 (si celle-ci est unique) n'est pas trop grande. Il est donc essentiel de limiter suffisamment cette pulsation ω_0, et donc la bande passante du système contrôlé. Dans le cas où il y a plusieurs pulsations au gain unité ω_j, $j = 1, 2, ...$, il faudra limiter suffisamment $\max\{\omega_j, j = 1, 2, ...\}$.

- On vu d'autre part qu'une marge de retard suffisante assure une bonne robustesse vis-à-vis de dynamiques négligées ne présentant pas de résonances. En revanche, lorsque ces dynamiques négligées présentent des "pics de résonance", la marge de retard devient un concept insuffisant (bien que toujours nécessaire), et le système bouclé nominal doit satisfaire une condition telle que (17), où $|W_1(i\omega)|$ est un majorant de l'erreur de modèle multiplicative. Cette erreur est le plus souvent assez faible dans les basses fréquences, et importante dans les hautes fréquences, là où sont les dynamiques négligées. Considérons une pulsation ω pour laquelle on ait une importante erreur de modèle, c'est-à-dire

$$|W_1(i\omega)| >> 1 \tag{32}$$

Pour que la condition (17) soit satisfaite, il est nécessaire que $|T(i\omega)| << 1$. D'après (1.2), ceci équivaut à $|L(i\omega)| << 1$. Autrement dit, **il est nécessaire que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte soit petit aux fréquences où l'erreur de modèle est importante**. L'erreur de modèle dont il est question ici, et qui est définie par la relation (15), est dite "non structurée". Nous envisagerons plus loin le cas d'erreurs "structurées", comme par exemple une erreur sur un ou des coefficients de la fonction de transfert P ; les conclusions sont alors différentes. Pour $|L(i\omega)| << 1$, on a $L(i\omega) \approx T(i\omega)$, et la condition (17) entraîne donc

$$|L(i\omega)| \leq \frac{1}{|W_1(i\omega)|} \tag{3.33}$$

- Revenons maintenant sur la question des performances, et en premier lieu sur le rejet d'une perturbation sur la sortie. Le système bouclé doit satisfaire la relation (29). Considérons une pulsation ω à laquelle il faut une performance élevée (c'est-à-dire à laquelle $|d_y(i\omega)|$ peut être grand). A cette pulsation, on a donc

$$|W_2(i\omega)| >> 1 \tag{34}$$

Pour que la condition (29) soit satisfaite, il est nécessaire que $|S(i\omega)| << 1$, et donc (d'après (1.2)) que $|L(i\omega)| >> 1$. Ainsi donc, **il est nécessaire que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte soit grand aux fréquences où l'on veut un bon rejet de perturbation. Il est donc absolument impossible d'assurer un bon rejet de perturbation à une fréquence où l'erreur de modèle non structurée est importante.** Pour $|S(i\omega)| << 1$, on a $L(i\omega) \approx \dfrac{1}{S(i\omega)}$, et la condition (29) entraîne donc

$$|L(i\omega)| \geq |W_2(i\omega)| \tag{35}$$

Les conditions qui viennent d'être obtenues ont leur traduction immédiate sur le lieu de Bode de L. Considérons de nouveau le cas classique où le gain de $L(i\omega)$ est une fonction décroissante de ω. Alors, on doit "conformer la boucle" (d'où le terme anglais de "loop shaping") de façon que le lieu de Bode ait l'allure indiquée sur la figure 10.

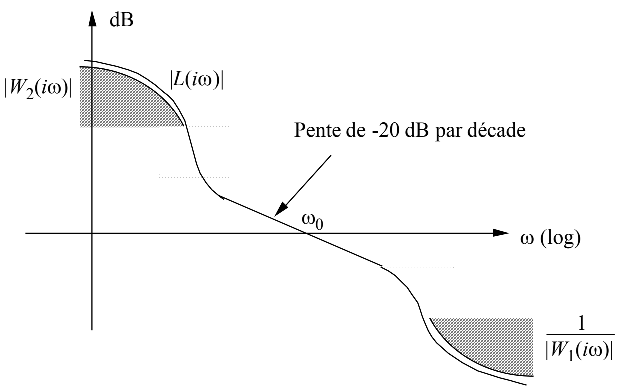


***Figure 10** - "Loop shaping"*

- Notons enfin qu'un bon "loop shaping" est nécessaire, mais non suffisant en général. En effet, il reste encore à satisfaire les conditions (30) et (31).

La condition (30), comme on l'a vu, permet d'éviter les simplifications des pôles oscillants peu amortis du système à régler par les zéros du régulateur. C'est une condition qui ne fait donc pas seulement intervenir le produit $L = P\ K$, contrairement aux conditions qu'on vient d'examiner. Elle impose de ne pas réaliser une sorte de "loop shaping universel", comme celui de la figure 10, mais de réaliser un "loop shaping" dépendant de P. En effet, si le gain de P présente un pic de résonance, l'absence de simplification du pôle correspondant impose que le gain de L doit présenter le même pic de résonance. Ceci apparaît nettement dans l'exemple traité dans la Section 5.

Considérons maintenant la condition (31) ; elle a également pour particularité de ne pas porter uniquement sur le produit $L = P\ K$. Le plus souvent, le bruit de mesure est gênant dans les hautes fréquences. D'après ce qui précède, on a alors $|L(i\omega)| << 1$, d'où $|S(i\omega)| \approx 1$. A ces fréquences, la condition (31) impose donc $|K(i\omega)| \leq \dfrac{1}{|W_4(i\omega)|}$.

Elle se traduit donc par une **limitation du gain du régulateur dans les hautes fréquences**.

2.6 - Dégradation du compromis robustesse/performance due à la présence de pôles et de zéros instables

- *Pôles instables :* Supposons que le degré relatif(4) de la fonction de transfert de la boucle ouverte L soit strictement supérieur à 1. Dans, ce cas, un théorème dû à Bode, et généralisé par Freudenberg et Looze [Fre 85] montre qu'on a l'égalité

$$\pi \sum_{j \in J} \Re_e\left(p_j\right) = \int_0^{+\infty} Log\left|\ S(i\,\omega)\right| d\omega \tag{3.36}$$

où les p_j, $j \in J$, sont les pôles instables de L. Cette formule montre (si l'on s'exprime de manière approximative) que plus la boucle ouverte est instable (c'est-à-dire plus le membre gauche de (36) est grand), plus $|S(i\omega)|$ doit, en moyenne, être plus grand que 1. Ceci limite évidemment les performances, ainsi que la marge de module.

-*Zéros instables* : Supposons que L ait (au moins) un zéro instable z, et des pôles instables p_j, $j \in J$. Soit alors

(4) On rappelle que le degré relatif d'une fraction rationnelle est la différence entre le degré de son dénominateur et le degré de son numérateur.

$$B(s) = \prod_{j \in J} \frac{p_j - s}{\overline{p}_j + s}$$

(c'est-à-dire le "produit de Blaschke" des pôles instables de L). On a $|B(s)|=1$ (resp. <1) si et seulement si $R_e(s)=0$ (resp. >0). On a la relation suivante [Fre 85] :

$$\pi \, Log\, |B^{-1}(z)| = \int_{-\infty}^{+\infty} Log \left| S(i\omega) \right| d\theta_z(\omega) d\omega \tag{37}$$

où θ_z est la fonction définie par $\theta_z(\omega) = \mathrm{arctg}(\frac{\omega - y}{x})$, avec $z = x + iy$. Le membre de gauche de (37) est positif, et la fonction θ_z est strictement croissante. L'existence du zéro instable z contraint donc $|S(i\omega)|$ à prendre des valeurs plus grandes que 1. On retrouve donc la même situation défavorable que celle rencontrée en présence d'un pôle instable.

Supposons maintenant que L ait un pôle instable p très voisin d'un zéro instable z. Alors, on a $B(z) \approx 0$, donc le membre de gauche de (37) est presque infini. Cette situation est donc extrêmement défavorable -- comme cela est par ailleurs bien connu.

Enfin supposons (pour simplifier l'analyse) que L ait un seul zéro instable z ; on peut écrire $L(s)$ sous la forme :

$$L(s) = \frac{z - s}{z + s} \; L'(s)$$

où L' est une fonction de transfert qui est cette fois à minimum de phase, et qui est telle que $|L(i\omega)| = |L'(i\omega)|$, $\forall\omega$. On obtient immédiatement :

$$\frac{|L(i\omega) - L'(i\omega)|}{|L(i\omega)|} << 1 \text{ pour } \omega << \frac{|z|}{2}$$

Par conséquent, au voisinage de la pulsation au gain unité ω_0, le lieu de Nyquist de L sera très voisin de celui de L' si $\omega_0 << \frac{|z|}{2}$. Sous cette condition, la boucle ouverte aura donc des propriétés très semblables de celles d'une boucle ouverte à minimum de phase. Autrement dit, un zéro instable est peu gênant à condition que son module soit suffisamment grand par rapport à ω_0.

Finalement, cette analyse montre que la présence d'un zéro instable conduit à réduire suffisamment la pulsation au gain unité ω_0, et donc à réduire les performances, jusqu'à ce que ce zéro se situe dans les hautes fréquences par rapport à ω_0.

2.7 - Cas des systèmes multivariables

Dans le cas multivariable, des pondérations fréquentielles scalaires sont souvent insuffisantes. La condition (17) sera donc à remplacer par $\|W_1\ T_i\ W'_1\|_\infty \leq 1$, avec i $=e$ ou s suivant que l'erreur de modèle multiplicative est en entrée ou en sortie, et où W_1 et W'_1 sont cette fois des matrices de transfert (qui ne commutent pas avec T_i). De même, la condition (29) sera à remplacer par $\|W_2\ S_s W'_2\|_\infty \leq 1$. D'autre part, il peut être important d'avoir une condition du même type sur S_e, de manière à assurer une marge de module suffisante en entrée. De la même manière, la condition (30) sera à remplacer par $\|W_3\ S_s\ P\ W'_3\|_\infty \leq 1$, et la condition (31) par $\|W_4\ S_e K\ W'_4\|_\infty \leq 1$. Ces pondérations fréquentielles matricielles sont en général difficiles à déterminer.

L'extension du concept de "loop shaping" au cas multivariable n'est pas toujours possible, notamment lorsque des pondérations fréquentielles matricielles sont utilisées avec des conditionnements assez grands [Ste 91]. Cette extension devient en revanche assez naturelle lorsque le problème de commande et le système à régler ont des caractéristiques telles que des pondérations fréquentielles scalaires (ou matricielles, mais avec un conditionnement proche de 1) peuvent être utilisées : l'idée consiste alors à remplacer le module de L par les valeurs singulières de L_s [Doy 81]. Supposons, comme on l'avait fait dans le cas monovariable, que l'erreur de modèle multiplicative (supposée en sortie) soit importante dans les hautes fréquences, et que les performances soient exigées dans les basses fréquences. La condition (20) se traduira alors dans les hautes fréquences par

$$\bar{\sigma}(L_s(i\omega)) \leq \frac{1}{|W_1(i\omega)|} \tag{3.38}$$

et la condition (29) se traduira dans les basses fréquences par

$$\underline{\sigma}(L_s(i\omega)) \geq |W_2(i\omega)|$$

Ces deux inégalités se traduisent par le "loop shaping" multivariable de la figure 11. Bien entendu, comme dans le cas monovariable, et pour les mêmes raisons, un tel "loop shaping" est nécessaire mais non suffisant.

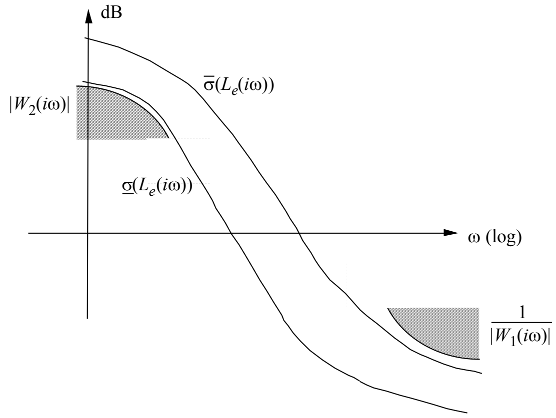


Figure 11 *- Loop shaping multivariable*

Pour terminer cette Section, signalons l'approche très intéressante développée par McFarlane et Glover [McF 90], fondée sur la notion de factorisation copremière de la matrice de transfert P, et qui permet de réaliser un "loop shaping" multivariable respectant la condition de non simplification des pôles oscillants peu amortis de P par les zéros de K, ainsi que la condition de limitation du gain de K dans les hautes fréquences. L'exposition complète de cette approche nous mènerait trop loin, mais nous conseillons vivement le lecteur de se reporter à la référence citée.

3 - Le problème H_∞ standard et sa résolution

1 - Le problème de sensibilité mixte

Le problème H_∞ standard se définit de la manière suivante : "Etant donné un système augmenté $\boldsymbol{P_a}$, trouver un régulateur stabilisant $\boldsymbol{K}$ tel que $J(\boldsymbol{K}) = \|F_b(P_a, K)\|_\infty$ soit inférieur ou égal à 1."

On a vu dans la Section 2 que le problème de "stabilité robuste" était de cette nature (conditions (20) ou (25)), de même que les différents problèmes de performance envisagés (conditions (29), (30) ou (31)). En pratique, toutefois, ces différents problèmes ne sont pas dissociés (comme on l'a vu au §2.5), et nous allons donc montrer tout d'abord comment on peut considérer globalement l'ensemble de ces problèmes, en les ramenant à un unique problème standard. Nous n'envisagerons que le cas monovariable. En rassemblant sur un même schéma les bouclages perturbateurs des figures 5, 8 et 9, et en tenant compte de la contrainte (30), on parvient au système bouclé de la figure 12.

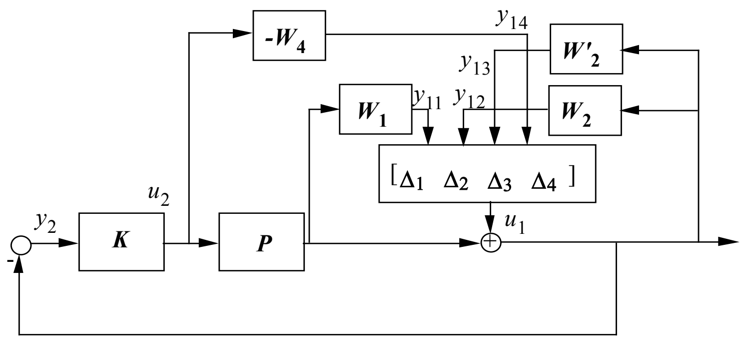


Figure 12 *- Système contrôlé avec bouclages perturbateurs*

Ce système bouclé se met sous la forme standard de la figure 6. Le système augmenté $\boldsymbol{P_a}$ correspondant a une matrice de tranfert $P_a = \begin{pmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P_{a21} & P_{a22} \end{pmatrix}$, avec $P_{a11} = (0 \;\; W_2 \;\; W'_2 \;\; 0)^T$, $P_{a12} = (W_1 P \quad W_2 P \quad W'_2 P \quad -W_4)^T$, $P_{a21} = -1$, $P_{a22} = -P$. En appliquant (3.22), on obtient donc :

$$F_b(P_a, K) = \begin{pmatrix} -W_1 T \\ W_2 S \\ W'_2 S \\ W_4 K S \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

D'après le Théorème 3.2, la condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.12 soit stable pour toute perturbation $\Delta = (\Delta_1 \; \Delta_2 \; \Delta_3 \; \Delta_4)$ appartenant à B_{snl1} est que l'inégalité (3.23) soit satisfaite. Or, la plus grande valeur singulière d'une matrice colonne $M = (M_1 \; ... \; M_n)^T$ est $\bar{\sigma}(M) = (\sum |M_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, d'où

$$max \; \{|M_i|\} \leq \bar{\sigma}(M) \leq \sqrt{n} \; max \; \{|M_i|\} \tag{3.41}$$

Par conséquent, la condition (3.23) est suffisante pour que les conditions (3.17), (3.29), (3.30) et (3.31) soient satisfaites. Nous verrons sur l'exemple traité dans la Section 3.5 qu'il est possible de choisir les pondérations fréquentielles W_1, W_2, W'_2 et W_4 de telle façon que très peu de conservatisme soit introduit. On peut donc dire que le problème fondamental qui consiste à synthétiser un régulateur réalisant un bon compromis robustesse/performances, se ramène à un problème H_∞ standard. Ceci illustre bien l'importance de ce dernier problème.

3.3.2 L'algorithme de Glover-Doyle [Glo 88], [Doy 89]

Cet algorithme permet de résoudre le "problème standard" défini plus haut, à partir d'une représentation d'état du système augmenté $\boldsymbol{P_a}$. Supposons que cette représentation d'état soit définie par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B_1\,u_1 + B_2\,u_2 \\ y_1 &= C_1\,x + D_{11}\,u_1 + D_{12}\,u_2 \\ y_2 &= C_2\,x + D_{21}\,u_1 + D_{22}\,u_2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Soit : $m_i = \dim(u_i)$, $p_i = \dim(y_i)$ et $n = \dim(x)$.

Hypothèses

Les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

(H_1) : (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable

(H_2) : $\mathrm{rang}(D_{12}) = m_2$ et $\mathrm{rang}(D_{21}) = p_2$

(H_3) : $\mathrm{rang}\begin{pmatrix} A - i\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

(H_4) : $\mathrm{rang}\begin{pmatrix} A - i\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

Interprétons maintenant ces conditions :

• (H_1) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un régulateur $\boldsymbol{K}$ stabilisant. Dans le cas du problème de sensibilité mixte (3.40), elle implique notamment que les pondérations fréquentielles W_i doivent être stables, puisque les pôles de ces pondérations sont des valeurs propres de A, qui sont non observables par C_2 ou non gouvernables par B_2.

• La condition $\mathrm{rang}(D_{12}) = m_2$ signifie que la pondération sur y_2 inclut une pondération non singulière sur la commande u_2. Elle impose évidemment $p_1 \geq m_2$. On a $D_{12} = P_{a12}(\infty)$. Dans le cas du problème de sensibilité mixte (3.40), lorsque P est une fonction de transfert strictement propre, cette condition équivaut donc à $W_4(\infty) \geq 0$.

• La condition rang(D_{21}) = p_2 signifie que le signal u_1 inclut un bruit de mesure non singulier. Elle impose $m_1 \geq p_2$. D'autre part, on a $D_{21} = P_{a21}(\infty)$. Dans le cas du problème de sensibilité mixte (3.40), cette condition est toujours vérifiée.

• La condition (H_3) signifie que le sous-système P_{a12} ne doit pas avoir de zéros de transmission sur l'axe imaginaire si (C_1, A, B_2) est une réalisation minimale [Che 82]. Dans le cas du problème de sensibilité mixte (3.40), cette condition de minimalité de la représentation est en général satisfaite, puisque tous les modes de P_a se retrouvent dans P_{a12} ; cette condition revient donc à dire que l'une au moins des fonctions de transfert $W_i P$ et W_4 ne doit pas avoir de zéro imaginaire pur.

• Considérons enfin la condition (H_4). Dans le cas du problème de sensibilité mixte, cette condition ne peut pas s'interpréter en terme de zéro de transmission, puisque les modes de P_a n'apparaissent pas dans P_{a21} ; par conséquent, (C_2, A, B_1) n'est jamais une réalisation minimale, et plus précisément, d'après (H_1), les valeurs propres instables de A sont toutes non gouvernables par B_1. En conséquence, toute valeur propre instable de A est un zéro invariant du système (C_2, A, B_1, D_{21}) [Mac 76] [Bou 95a]. Il s'ensuit que la condition (H_4) est violée dès que A a une valeur propre sur l'axe imaginaire. Ainsi donc, non seulement les pondérations fréquentielles ne doivent pas avoir de pôles sur l'axe imaginaire, mais **le système *P* lui-même doit respecter cette condition**. Cette dernière observation est plus surprenante, puisqu'elle n'est pas imposée par la nature du problème. Par conséquent, si P présente des pôles sur l'axe imaginaire, il conviendra de les stabiliser légèrement de manière artificielle, suivant la méthode indiquée au §3.2.4.

Solution dans un cas simplifié

La solution du problème standard dans le cas général est assez complexe ; nous nous contenterons ici d'envisager un cas particulier où la solution est beaucoup plus simple, et où l'interprétation du résultat est beaucoup plus aisée. Pour le cas général, on pourra consulter l'article [Glo 88] ou le livre [Mac 89]. Une démonstration très concise des théorèmes qui suivent peut être trouvée dans [Kwa 93].

a) *Cas de l'information complète*

Nous supposerons tout d'abord que l'état complet est accessible à la mesure, et donc que $y_2 = x$, soit encore $C_2 = I$, $D_{21} = 0$, $D_{22} = 0$. Dans ce cas, nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes :

(H_5) (C_1, A) est détectable

(H_6) $D_{11} = 0$

(H7) $$D_{12}^{\mathrm{T}} [C_1 \;\; D_{12}] = [0 \;\; I]$$

L'hypothèse (H5) signifie que tous les modes du système augmenté sont pondérés dans le critère $J(\boldsymbol{K})$. L'hypothèse (H6) signifie qu'il n'y a pas de terme direct entre le signal perturbateur u_1 et la sortie pondérée y_1. Enfin, l'hypothèse (H7) signifie que $C_1\, x$ et $D_{12}\;\; u_2$ sont orthogonaux, de sorte qu'il n'y a pas dans $J(\boldsymbol{K})$ de pondérations sur des termes croisés en x et u_2, et que de plus la pondération sur u_2 est normalisée.

Considérons alors l'équation algébrique de Riccati

$$A^T X + X A + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \qquad (3.43)$$

où γ désigne un réel >0. Cette équation est associée à la matrice hamiltonienne

$$H = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix} \qquad (3.44)$$

(On a le résultat suivant [Doy 89] :

Théorème 3.3a : "Sous les hypothèses (H1) à (H7), il existe un retour d'état $u_2 = K\, x$ stabilisant $F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K})$ et pour lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq \gamma$, si et seulement si

(i) H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire
(ii) il existe une unique solution $X_\infty \geq 0$ à l'équation (3.43)

(où " ≥" signifie matrice symétrique réelle semi-définie positive).

Un tel retour d'état est alors donné par :

$$K = - B_2^T X_\infty \text{ ."} \qquad (3.45)$$

On peut noter que cette solution a des rapports étroits avec la commande linéaire quadratique. En effet, lorsque γ tend vers l'infini, l'équation (3.43), la matrice (3.44) et le gain (3.45) deviennent respectivement l'équation de Riccati, la matrice hamiltonienne et la solution du problème linéaire quadratique. On montre facilement que la "formulation fréquentielle" de ce problème consiste à trouver le régulateur K minimisant $\|F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K})\|_2$. La norme considérée ici est la norme dans l'espace de Hardy H_2, qui est l'ensemble des matrices de transfert G, analytiques dans le demi-plan droit ouvert, et telles que

$$\sup_{\sigma>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}\left[G(\sigma+i\omega)^* \, G(\sigma+i\omega)\right] d\omega < \infty \qquad (3.46)$$

La quantité (3.46) est alors par définition $\|G\|_2{}^2$. Lorsque G est rationnelle, on peut prendre σ=0, ce qui évite de prendre une borne supérieure.

Il est bien connu que, compte tenu des hypothèses qui ont été prises, le problème linéaire quadratique admet une solution (on peut noter, à cet égard, l'importance de l'hypothèse (H_5)), et que les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.3a sont satisfaites.

b) *Cas de l'information incomplète*

Envisageons maintenant le cas plus complexe où la sortie y_2, disponible pour le calcul de la commande, est distincte de x.

Nous supposerons que les hypothèses (H_1) à (H_7) sont satisfaites, et nous rajouterons les hypothèses suivantes :

(H_8) (A, B_1) est stabilisable

(H_9) $D_{22} = 0$

(H_{10}) $\begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}{}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$

Les hypothèses (H_8) et (H_{10}) sont duales des hypothèses (H_5) et (H_7) respectivement.

Considérons l'équation algébrique de Riccati

$$A\,Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2}\, C_1{}^T C_1 - C_2{}^T C_2)\; Y + B_1\, B_1{}^T = 0 \qquad (3.47)$$

à laquelle est associée la matrice hamiltonienne

$$J = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2}\, C_1{}^T C_1 - C_2{}^T C_2 \\ -\,B_1\, B_1{}^T & -\,A \end{pmatrix} \qquad (3.48)$$

On a le résultat suivant [Doy 89] :

Théorème 3.3b :"Sous les hypothèses (H_1) à (H_{10}), il existe un retour de sortie $u_2 = \boldsymbol{K}\, y_2$ stabilisant $F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K})$ et pour lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq \gamma$, si et seulement si

- les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.3a sont satisfaites

(iii) J n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire

(iv) il existe une unique solution $Y_\infty \geq 0$ à l'équation (3.47)

(v) $\rho(X_\infty \; Y_\infty) < \gamma^2$

Une solution est alors la synthèse retour d'état-observateur suivante :

$$u_2 = - B_2^T X_\infty \hat{x} \tag{3.49}$$

où $\hat{x}$ est fourni par l'observateur

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_1 \hat{u}_1 + B_2 u_2 + Z_\infty L_\infty (C_2 \hat{x} - y_2) \tag{3.50}$$

Les matrices L_∞ et Z_∞ sont définies par

$$L_\infty = - Y_\infty C_2^T \tag{3.51}$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty \; X_\infty)^{-1} \tag{3.52}$$

et le signal $\hat{u}_1$ est défini par

$$\hat{u}_1 = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} \text{ ."} \tag{3.53}$$

Notons tout d'abord que le symbole ρ de la condition (v) désigne le rayon spectral : si M est une matrice carrée à coefficients réels ou complexes, ayant pour valeurs propres λ_1, λ_2, ... alors $\rho(M) = \max\{|\lambda_i|,\ i = 1, 2, ...\ \}$. Une première remarque qu'appelle le Théorème 3.3.b est que le "régulateur H_∞" qu'il définit vérifie de façon évidente un principe de séparation. Le gain de la commande (3.49) est égal à celui de la relation (3.45). D'autre part, $\hat{x}$ s'interprète comme une estimée de l'état x. La différence majeure entre l'observateur (3.50) et le filtre de Kalman réside dans la présence du terme $\hat{u}_1$, qui s'interprète comme une estimée de la pire perturbation possible u_{1p}.

Si γ tend vers l'infini, l'équation (3.47) et la matrice (3.48) tendent respectivement vers l'équation de Riccati et la matrice hamiltonienne associées au filtre de Kalman. D'après les hypothèses prises, les conditions (iii) et (iv) sont satisfaites dans ce cas. D'autre part, la condition (v) est trivialement vérifiée,

Z_∞ tend vers l'identité et $\hat{u}_1$ tend vers 0, donc l'observateur (3.50) tend vers le filtre de Kalman. Finalement, le "régulateur H_∞" défini par ce théorème converge vers le régulateur LQG, minimisant $\|F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K})\|_2$. Pour γ fini, ce "régulateur H_∞" a le même ordre que le régulateur LQG, ou encore que le système augmenté $\boldsymbol{P_a}$.

Le Théorème 3.3.b donne un régulateur $\boldsymbol{K}$ parmi d'autres pour lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq \gamma$ (si les conditions d'existence sont satisfaites). Ce régulateur particulier est appelé le **régulateur central**. A partir de ce régulateur particulier, il est possible de trouver tous les autres régulateurs $\boldsymbol{K'}$, stabilisant $F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K'})$, et pour lesquels on ait $\|F_b(P_a, K')\|_\infty \leq \gamma$. Pour l'instant, le régulateur $\boldsymbol{K}$ a une entrée y_2 et une sortie u_2. Augmentons maintenant ce système par une entrée supplémentaire z et une sortie supplémentaire w, de sorte que :

- la quantité z se rajoute au second membre de (3.49)

- la quantité $Z_\infty B_2 z$ se rajoute au second membre de (3.50)

- et qu'enfin on ait l'équation supplémentaire

$$w = - C_2 \hat{x} + y_2 \tag{3.54}$$

Avec ces modifications, on obtient un "régulateur augmenté" $\boldsymbol{K_a}$, d'entrées y_2 et z, et de sorties u_2 et w. On a le résultat suivant [Doy 89] :

Théorème 3.3.c : "Sous les conditions du Théorème 3.3.b, l'ensemble des régulateurs rationnels $\boldsymbol{K'}$, stabilisant $F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K'})$, et pour lesquels on a $\|F_b(P_a, K')\|_\infty \leq \gamma$, sont donnés par

$$K' = F_b(K_a, Q) \tag{3.55}$$

où Q est une matrice de transfert arbitraire appartenant à RH_∞ et satisfaisant la condition $\|Q\|_\infty < \gamma$. Le régulateur central est obtenu pour $Q = 0$."

La paramétrisation (3.55), dite « de Youla », est illustrée par le schéma de la figure 3.13.

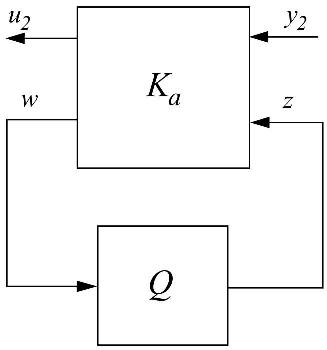


Figure 3.13 *- Paramétrisation de Youla*

Terminons cette Section par quelques remarques :

- Pour l'instant, nous n'avions pas clairement défini ce que signifie "stabiliser $F_b(\boldsymbol{P_a}, \boldsymbol{K'})$". Il s'agit de la stabilité asymptotique, dans le sens où tous les états de $\boldsymbol{P_a}$ et de $\boldsymbol{K'}$ doivent tendre vers 0 lorsque u_1=0. On demande donc ici une propriété assez forte, et cette exigence est souvent gênante en pratique [Chev 93]. C'est elle qui interdit par exemple de choisir des pondérations ayant des pôles sur l'axe imaginaire ; c'est pourquoi on ne peut pas obtenir, par l'algorithme de Glover-Doyle, de régulateur ayant rigoureusement un effet intégral.

- Le "régulateur central" n'est pas en général le plus intéressant parmi l'ensemble des régulateurs défini par la paramétrisation (3.55). En particulier, il existe souvent, dans cet ensemble, des régulateurs d'ordre plus faible que le régulateur central ; et il serait très intéressant de pouvoir déterminer le (ou un) régulateur d'ordre minimal. Ce problème est encore ouvert à l'heure actuelle.

- Pour γ tendant vers l'infini, le "γ-problème" qui consiste à trouver un régulateur stabilisant $\boldsymbol{K}$ pour lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq \gamma$, admet une solution, puisqu'il équivaut à un problème LQG. C'est donc que le γ-problème admet une solution pour γ suffisamment grand. C'est pourquoi il est souvent proposé de calculer de manière approchée, par dichotomies, la valeur optimale de γ, γ*, au-dessous de laquelle le γ-problème n'a plus de solution, et de retenir finalement le régulateur central correspondant à cette valeur γ*. Ces dichotomies sont appelées "γ-itérations". Toutefois, les spécifications qu'on s'est fixées au départ ne sont réalisées que si l'on obtient un γ égal à 1. Le principe des γ-itérations n'apparaît donc pas comme le meilleur, et il vaut souvent mieux fixer une fois pour toutes la ou les pondérations correspondant aux contraintes de robustesse (puisque celles-ci ne peuvent être relâchées) et itérer sur les pondérations permettant de fixer les performances : il est clair que si l'on demande des performances trop fortes, le "1-problème" sera sans solution ; pour des performances faibles, ce problème aura bien une solution (à moins que les incertitudes de modèles soient telles qu'il n'existe pas de régulateur linéaire stabilisant l'ensemble des systèmes incertains), mais cette solution sera conservative. C'est suivant cette méthode qu'est calculé le régulateur dans l'exemple de la Section 3.5.

3.4 Problèmes structurés

3.4.1 Opérateurs de mise à l'échelle et Théorème des Petits Gains Stucturé

L'intérêt et la justification de « l'approche H_∞ » qui vient d'être exposée repose en grande partie sur le Théorème 2 (qui découle directement du Théorème 3.9). La condition de base (23) n'est pas conservative à partir du moment où Δ est n'importe quelle incertitude appartenant aux ensembles B_{snl1} ou B_{s1}, qui sont des ensembles d'incertitudes dites non structurées, dans le sens où ces incertitudes sont caractérisées uniquement par une condition de gain (de la forme $\gamma(\Delta)<1$). En revanche, cette condition devient évidemment conservative si les seules incertitudes Δ qui sont envisagées appartiennent à un sous-ensemble particulier, et doté d'une certaine structure, de B_{snl1} ou B_{s1}. Dans cette Section, nous étudierons le cas où Δ appartient à un sous-ensemble Δ de B_{snl1} ou B_{s1}, constitué d'**opérateurs diagonaux** (notion que nous allons préciser). Les idées de base exposées dans ce paragraphe sont classiques, et ont leur origine dans les travaux de Doyle et Safonov sur la μ-analyse [Doy 82], [Doy 85], [Saf 82]. Ces travaux concernent uniquement le cas des systèmes linéaires stationnaires. Des extensions ont été envisagées, plus récemment, au cas de systèmes non linéaires et/ou instationnaires, mais leur validité n'a pas toujours été solidement étayée. Les Théorèmes 4.a à 4.c, ainsi que le contre-exemple donnés dans ce paragraphe, ont pour finalité de cerner avec précision ce domaine de validité, et sont en partie originaux. Ils forment ce qu'on peut appeler le "Théorème des Petits Gains Structuré".

Nous serons contraint, désormais, d'indiquer les dimensions. Notons L_2^n (resp. L_{2e}^n) l'ensemble des fonctions x, définies sur $\Re$, à valeurs dans $\Re^n$, et de carré intégrable (resp. telles que $\forall\ T$, $P_T\, x$ est de carré intégrable). Nous conviendrons d'écrire

$$\Delta = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Delta_1}, ..., \boldsymbol{\Delta_q}) \tag{3.56}$$

(et nous dirons alors que Δ a une structure diagonale) si pour x de la forme : $x = (x_1, ..., x_q)$, où chaque x_i appartient à un espace $L_2^{n_i}$, on a $\Delta(x) = (y_1, ..., y_q)$, où chaque y_i appartient à $L_2^{n_i}$ et vérifie $y_i = \boldsymbol{\Delta_i}(x_i)$; nous écrirons alors $\dim(\boldsymbol{\Delta_i}) = n_i$ (et nous dirons que "$\boldsymbol{\Delta_i}$ est un opérateur de dimension n_i."). On a évidemment dim(Δ)=n, avec $n = n_1 + ... + n_q$. Il est immédiat que pour un opérateur stable de la forme (3.56), on a $\gamma(\Delta) = \max\{\gamma(\Delta_i), i=1, ...,n\}$ [Chev 93].

S'il existe un opérateur δ tel que dim(δ)=1, et tel que pour x ayant la forme ci-dessus avec n_i=1, on ait $\Delta(x)=(\delta(x_1), ..., \delta(x_q))$, nous écrirons $\Delta=\delta I_q$. Nous dirons alors que "Δ est un opérateur **scalaire** de dimension q". De façon générale, un opérateur Δ peut être de la forme

$$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1 I_{r_1}, ..., \delta_l I_{r_l}, \Delta_{l+1}, ... \Delta_{l+m}) \tag{3.57}$$

où les l premiers blocs de la parenthèse sont des opérateurs scalaires de dimension r_i, et où les m blocs suivants sont des "opérateurs non structurés" de dimension n_i.

Considérons le système bouclé de la figure 3.14, où Δ et $\boldsymbol{G}$ sont des opérateurs stables, pouvant être non linéaires, de L_{2e} dans L_{2e}. Soit d'autre part $\boldsymbol{D}$ un opérateur linéaire (éventuellement instationnaire) inversible de L_{2e} dans L_{2e}, stable et à inverse stable. Alors, le schéma de la figure 3.14 est équivalent à celui de la figure 3.15, avec $v_1 = \boldsymbol{D}^{-1} u_1$ et $v_2 = \boldsymbol{D}^{-1} u_2$.

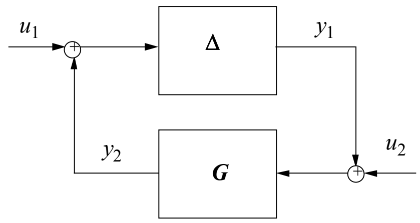


Figure 3.14 *- Système bouclé*

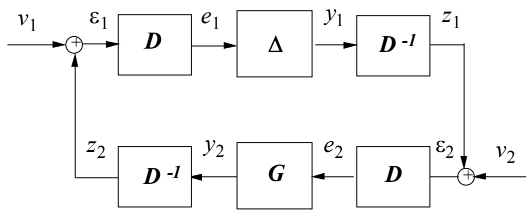


Figure 3.15 *- Système bouclé équivalent*

On déduit donc du Théorème des Petits Gains le résultat suivant, qui, bien qu'étant très simple, sera à la base de tous les résultats de ce paragraphe :

Théorème 3.4.a : "Soit Δ un sous-ensemble d'opérateurs de B_{snl1}, et **D** un ensemble d'opérateurs linéaires (éventuellement instationnaires) de dimension convenable, inversibles, stables et à inverse stable, tels que $\forall\, \boldsymbol{D} \in \mathbf{D}$, $\forall\, \Delta \in \Delta$, on ait

$$\gamma(\boldsymbol{D}^{-1}\, \Delta\, \boldsymbol{D}) \leq \gamma(\Delta) \tag{3.58}$$

Alors, une condition suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.14 soit stable pour tout $\Delta \in \Delta$ est :

$$\inf_{\boldsymbol{D} \in \mathbf{D}} \gamma(\boldsymbol{D}^{-1}\, \boldsymbol{G}\, \boldsymbol{D}) < 1.\text{"} \tag{3.59}$$

En effet, pour tout opérateur $\boldsymbol{D}$ satisfaisant (3.58) et tel que $\gamma(\boldsymbol{D}^{-1}\, \boldsymbol{G}\, \boldsymbol{D}) < 1$, le système bouclé de la figure 3.15 est stable. La stabilité du système bouclé de la figure 3.14 résulte alors de la stabilité des opérateurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}^{-1}$.

Il nous reste maintenant à examiner pour quels types d'ensembles Δ on peut trouver un ensemble **D** associé pour lequel on ait la propriété (3.58).

a) *Cas d'incertitudes linéaires*

On sait qu'un opérateur linéaire $\boldsymbol{G}$ de $L_{2e}{}^n$ dans $L_{2e}{}^n$ peut se représenter par son **noyau** K_G, de telle façon que pour tout x appartenant à $L_{2e}{}^n$, on peut écrire

$$(\boldsymbol{G}\, x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_G(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau \tag{3.60}$$

Bien entendu, on supposera que $\boldsymbol{G}$ est causal, c'est-à-dire que $K_G(t, \tau) = 0$ pour $\tau > t$. L'écriture (3.60) est une simplification, car dans le contexte le plus général, le noyau K_G est une matrice de distributions sur $\Re^2$, auquel cas (3.60) ne peut plus s'écrire au moyen d'une intégrale [Kho 72] ; toutefois, par abus de langage, et dans un souci de simplification, et nous utiliserons pour les distributions la "notation fonctionnelle". Par exemple, supposons que K_G soit le produit : $K_G(t, \tau) = h(t)\, \delta(t\text{-}\tau)\, I_n$, où h est une matrice de dimension nxn, dont les éléments sont des fonctions localement intégrables (qu'on peut donc associer à des distributions), et où δ désigne la distribution de Dirac. En écrivant, par abus de langage, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, I_n\, x(\tau)\, d\tau = x(t)$, on obtient $(\boldsymbol{G}\, x)(t) = h(t)\, x(t)$; $\boldsymbol{G}$ est alors un **opérateur linéaire sans mémoire**. Le cas stationnaire correspond au cas où, de nouveau par abus de langage, $K_G(t, \tau)$ est de la forme $G(t\text{-}\tau)$, où G est la matrice des réponses impulsionnelles de $\boldsymbol{G}$. L'intégrale (3.60) devient alors un produit de convolution.

Soit maintenant un opérateur linéaire **scalaire** $\boldsymbol{G_1}$, de dimension n, et un opérateur linéaire $\boldsymbol{G_2}$ de même dimension ; alors le noyau de $\boldsymbol{G_1}$ est de la forme : $K_{G_1}(t, \tau) = k_{G_1}(t, \tau)\, I_n$, où $k_{G_1}(t, \tau) \in \Re$. On a donc $K_{G_1} K_{G_2} = K_{G_2} K_{G_1}$. Nous supposerons que les noyaux des opérateurs sont des matrices de distributions suffisamment régulières (ces distributions étant nécessairement des mesures) pour qu'on puisse appliquer le Théorème de Fubini à l'intégrande $X_t(\tau, \xi) = K_{G_1}(t, \tau)\, K_{G_2}(\tau, \xi)\, x(\xi)$. On obtient alors $\boldsymbol{G_1 G_2} = \boldsymbol{G_2 G_1}$. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 3.4.b : "Supposons que Δ soit un ensemble d'incertitudes **linéaires** $\boldsymbol{\Delta}$ ayant la structure (3.2) et appartenant à B_{snl1}. Soit **D** l'ensemble des opérateurs linéaires $\boldsymbol{D}$, inversibles, stables et à inverse stable, et ayant la structure suivante :

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{D_1}, \ldots, \boldsymbol{D_l}, \boldsymbol{d_{l+1}}\, I_{n_1}, \ldots, \boldsymbol{d_{l+m}}\, I_{n_m}) \qquad (3.61)$$

où les l premiers blocs de la parenthèse sont des opérateurs "non structurés" de dimension r_i, et où les m blocs suivants sont des opérateurs scalaires de dimension n_i. Supposons enfin que les noyaux des éléments de Δ et de **D** soient suffisamment réguliers. Alors la condition (3.59) est suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.14 soit stable."

En effet, d'après ce qui précède, chaque bloc de $\boldsymbol{D}$ commute avec le bloc correspondant de $\boldsymbol{\Delta}$; on a donc $\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\Delta}$. Par conséquent, on a $\boldsymbol{D^{-1}}\,\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Delta}$, et l'inégalité (3.58) est toujours vérifiée (avec en fait une égalité).

b) *Cas d'incertitudes non linéaires*

Dans le cas d'incertitudes non linéaires, on ne peut plus conserver des structures aussi générales que dans le cas linéaire qui vient d'être traité. Ceci est dû au fait qu'un opérateur non linéaire $\boldsymbol{\Delta}$ ayant la structure (3.57) et un opérateur linéaire $\boldsymbol{D}$, éventuellement stationnaire ou même **constant** (c'est-à-dire de la forme $\boldsymbol{D}(x) = D\, x$, où D est une matrice constante), ayant la structure (3.61), ne commutent généralement pas. L'inégalité (3.58) ne peut pas non plus être obtenue dans le cas général. Ceci peut être montré sur un contre-exemple :

Considérons l'opérateur scalaire $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\delta} I_2$, où $\boldsymbol{\delta}$ est l'opérateur de L_{2e}^{1} dans L_{2e}^{1} défini de la manière suivante : $(\boldsymbol{\delta}\, x)(t) = x(t)$ si $|x(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$, et $(\boldsymbol{\delta}\, x)(t) = \frac{x(t)}{2}$ si $|x(t)| > \frac{1}{\sqrt{10}}$. On a évidemment $\gamma(\boldsymbol{\delta}) = \gamma(\boldsymbol{\Delta}) = 1$. Soit maintenant $\boldsymbol{D}$ l'opérateur constant dont la matrice est $D = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ la fonction de L_2^2 telle que u_1=0, et $u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ si $t \leq 10$ et $u_2(t) = 0$ si $t > 10$. On a $\|u\|$=1 et $\|\boldsymbol{D}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{D}\ u\| = \sqrt{26}$. Par conséquent, $\gamma(\boldsymbol{D}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{D}) \geq \sqrt{26} > \gamma(\boldsymbol{\Delta})$. De façon générale, l'inégalité (3.58) peut donc ne pas être vérifiée lorsque $\boldsymbol{\Delta}$ est un opérateur scalaire et $\boldsymbol{D}$ un opérateur constant non structuré.

En revanche, considérons maintenant un opérateur non structuré $\boldsymbol{\Delta}$ de dimension n, et un opérateur linéaire scalaire constant $\boldsymbol{D}$, de dimension n également, de la forme $\boldsymbol{D}(x)= d\,x$, où d est un réel strictement positif. Supposons $\boldsymbol{\Delta}$ stable, et soient a et b des réels positifs tels que $\|\boldsymbol{\Delta}\, y\|_T \leq a\ \|y\|_T + b$, pour tout y dans L_{2e}^n et pour tout instant T. On a alors pour tout x dans L_{2e}^n et pour tout instant T :

$$\|\boldsymbol{D}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{D}\ x\|_T \leq \frac{1}{d}\ \|\boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{D}\ x\|_T \leq \frac{1}{d}(a\ \|d\,x\|_T + b) \leq a\ \|x\|_T + \frac{b}{d}$$

Par conséquent, l'inégalité (3.58) est vérifiée. En appliquant ce résultat à chacun des blocs d'un opérateur diagonal $\boldsymbol{\Delta}$, on obtient le résultat suivant à partir du Théorème 3.4.a :

Théorème 3.4.c : "Supposons que Δ soit un ensemble d'incertitudes ayant la structure (3.56) et appartenant à B_{snl1}. Soit **D** l'ensemble des opérateurs linéaires constants, de la forme $\boldsymbol{D}(x) = D\,x$, où D est une matrice de la forme :

$$D = \mathrm{diag}(d_1\, I_{n_1}, \ldots , d_q\, I_{n_q}) \tag{3.62}$$

où les d_i sont des réels strictement positifs. Alors la condition (3.59) est suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.14 soit stable."

c) "*Q- analyse et synthèse*"

• *Analyse* : Plaçons-nous de nouveau dans le cadre du Théorème 3.4.c. Pour $\boldsymbol{G}$ fixé, il est évidemment important de pouvoir calculer la borne inférieure

$$Q(\boldsymbol{G}) = \inf_{\boldsymbol{D} \in \mathbf{D}} \gamma(\boldsymbol{D}^{-1}\ \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{D}) \tag{3.63}$$

Lorsque $\boldsymbol{G}$ est linéaire, stationnaire et de dimension finie, il est possible de faire ce calcul de manière approchée, et d'obtenir le "scaling" quasi-optimal correspondant [Apk 92a], [Apk 92b].

• *Synthèse* : Considérons le système bouclé de la figure 3.6, où le système augmenté $\boldsymbol{P_a}$ est linéaire et stationnaire, et où Δ est une incertitude quelconque de l'ensemble $\boldsymbol{\Delta}$ du Théorème 3.4.c. D'après ce théorème, il est immédiat qu'une condition suffisante pour que le système bouclé soit stable est

$$Q(F_b(P_a, K)) < 1 \tag{3.64}$$

Lorsque K est connu, il est possible de calculer cette quantité de manière approchée, comme on l'a dit plus haut. Mais le **problème de Q-synthèse** consiste à déterminer un régulateur $\boldsymbol{K}$ satisfaisant l'inégalité (3.64) (quand un tel régulateur existe). Une méthode qu'on peut utiliser pour faire ce calcul est celle des "***D-K* itérations**". Son principe est le suivant :

(i) A partir d'un premier régulateur $\boldsymbol{K_0}$ stabilisant $\boldsymbol{P_a}$ (et qui peut être conçu par une méthode H_2, ou une méthode H_∞, ou toute autre méthode de synthèse), déterminer un premier "scaling" D_0 tel que $\|D_0^{-1}\, F_b(P_a, K_0)\, D_0\|_\infty$ soit une bonne approximation de $Q(F_b(P_a, K_0))$.

(ii) "Augmenter" $\boldsymbol{P_a}$ par le "scaling" D_0. On obtient alors un nouveau système augmenté $\boldsymbol{P_{a1}}$, de même ordre que $\boldsymbol{P_a}$ (voir figure 3.16).

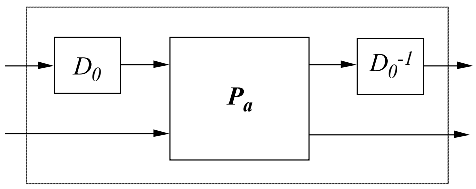


Figure 3.16 *- Construction du système augmenté* $\boldsymbol{P_{a1}}$

(iii) Déterminer, par γ-itérations, un régulateur $\boldsymbol{K_1}$ minimisant approximativement $\|D_0^{-1}\, F_b(P_a, K_1)\, D_0\|_\infty = \|F_b(P_{a1}, K_1)\|_\infty$ (ceci se faisant au moyen de l'algorithme de Glover-Doyle).

(iv) Retourner à l'étape (i), en remplaçant $\boldsymbol{K_0}$ par $\boldsymbol{K_1}$, et ainsi de suite.

On ne dispose pas pour cette procédure itérative de garanties de convergence, mais le plus souvent on obtient en pratique de bons résultats.

3.4.2 μ-analyse et synthèse

La technique des "scalings" qui vient d'être exposée (ou "Q-analyse") est très intéressante, mais ne donne qu'une condition **suffisante** de stabilité. Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante, il faut recourir à la notion de valeur singulière structurée, μ, inventée simultanément (quoique dans un formalisme légèrement différent) par Doyle et Safonov [Doy 82], [Saf 82]. Un bilan récent des résultats concernant cette approche peut être trouvé dans [Pac 93]. A la différence de l'approche du paragraphe précédent, qui est fondée sur le Théorème des Petits Gains, la μ-analyse est fondée sur le Critère de Nyquist. D'autre part, alors que la quantité Q ci-dessus était définie pour un opérateur ou une matrice de transfert, μ sera définie pour une **matrice**.

Soit $\mathbf{\Delta}$ un ensemble de matrices $\mathit{\Delta}$ carrées, de dimension n et diagonales par blocs, de la forme

$$\mathit{\Delta} = \mathrm{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \ldots , \delta_l I_{r_l}, \mathit{\Delta}_{l+1}, \ldots \mathit{\Delta}_{l+m}) \tag{3.65}$$

où les δ_i sont des complexes, et où les $\mathit{\Delta}_{l+i}$ sont des matrices carrées à coefficients complexes, de dimension n_i. On reprend donc une structure du même type que (3.57), à la différence qu'il s'agit ici de matrices. On notera $B_{\mathbf{\Delta}}$ l'ensemble des matrices $\mathit{\Delta}$ appartenant à $\mathbf{\Delta}$ et satisfaisant l'inégalité $\bar{\sigma}(\mathit{\Delta}) < 1$. Par définition, la valeur singulière structurée associée à la structure $\mathbf{\Delta}$, $\mu_{\mathbf{\Delta}}$, se calcule par

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = \frac{1}{\min\limits_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \left\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\,\Delta) = 0\right\}} \tag{3.66}$$

Autrement dit, on a $\det(I - M\,\mathit{\Delta}) \neq 0$ pour tout $\mathit{\Delta}$ appartenant à $B_{\mathbf{\Delta}}$, si et seulement si $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) < 1$. Si $\mathbf{\Delta}$ est non structuré (c'est-à-dire si $\mathbf{\Delta}$ est l'ensemble de toutes les matrices à coefficients complexes, carrées et de dimension n), on obtient $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) = \bar{\sigma}(M)$. D'autre part, pour toute structure $\mathbf{\Delta}$, on a $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) \leq \bar{\sigma}(M)$ [Pac1].

Soit maintenant $\Re(\mathbf{\Delta})$ l'ensemble des matrices de transfert rationnelles $\hat{\mathit{\Delta}}$, stables et telles que $\hat{\mathit{\Delta}}(s) \in \mathbf{\Delta}$ pour tout s dans le demi-plan droit. Considérons le système bouclé de la figure 3.14, où $\mathit{\Delta}$ (rep. $\boldsymbol{G}$) est un opérateur linéaire stationnaire ayant une matrice de transfert rationnelle $\hat{\mathit{\Delta}}$ (resp. $\hat{G}$). Le théorème de base de la μ-analyse est le suivant :

Théorème 3.5 : "Une condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.14 soit stable pour toute matrice de transfert $\hat{\Delta}$ appartenant à $\Re(\mathbf{\Delta})$ et satisfaisant l'inégalité $\|\hat{\Delta}\|_\infty < 1$, est :

$$\hat{G} \in \Re H_\infty \text{ et}$$

$$\sup_{\omega} \ \mu_{\mathbf{\Delta}}\,(\hat{G}(i\omega)) < 1." \tag{3.67}$$

On peut trouver une démontration de ce théorème dans [Mac 89].

Théorème de performance robuste :

Considérons le système bouclé de la figure 3.17, où Δ_2 représente une incertitude structurée (au sens d'une structure $\mathbf{\Delta_2}$), linéaire stationnaire et stable, dont la matrice de transfert $\hat{\Delta}_2$, supposée rationnelle, satisfait la condition

$$\|\hat{\Delta}_2\|_\infty < 1. \tag{3.68}$$

Soit μ_2 la valeur singulière structurée correspondant à cette structure.

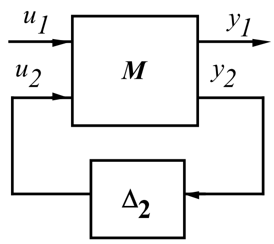


Figure 3.17 *- Système bouclé*

D'après le Théorème 3.5, une condition nécessaire et suffisante pour que ce système bouclé soit stable est : $\hat{M}_{22} \in \Re H_\infty$ et $\sup_{\omega} \ \mu_2(\hat{M}_{22}(i\omega)) < 1$, où $\hat{M}$ désigne la matrice de transfert (supposée rationnelle) de l'opérateur linéaire stationnaire ***M***. Supposons maintenant qu'on demande non seulement la stabilité de ce système bouclé, mais aussi des performances minimales, quelle que soit l'incertitude structurée Δ_2 vérifiant la condition (3.68). C'est ce qu'on appelle un problème de **performance robuste**. Suivant le formalisme introduit dans la Section 3.2, un tel objectif de performance se mettra sous la forme : $\bar{\sigma}(F_b(\hat{M}, \hat{\Delta}_2)(i\omega)) < 1$, pour tout ω et pour toute matrice de transfert $\hat{\Delta}_2$ structurée au sens de $\mathbf{\Delta_2}$; plus généralement, on pourra remplacer cette inégalité par $\mu_1(F_b(\hat{M}, \hat{\Delta}_2)(i\omega))<1$, où μ_1 désigne la valeur singulière structurée correspondant à une autre structure $\mathbf{\Delta_1}$. Soit alors $\mathbf{\Delta}$ la "structure augmentée", formée des matrices $\Delta=\mathrm{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, où $\Delta_1 \in \mathbf{\Delta_1}$ et $\Delta_2 \in \mathbf{\Delta_2}$. On a le résultat suivant ("Main Loop Theorem") [Pac 93] :

Théorème 3.6a : "L'inégalité $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M) <1$ équivaut à

$$\text{(i)} \quad \mu_2(M_{22})< 1 \qquad \text{et} \qquad \text{(ii)} \quad \sup_{\Delta_2 \in \mathbf{\Delta_2}} \mu_1(F_b(M, \Delta_2)) <1."$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Théorème 3.6b : "Le problème de performance robuste ci-dessus équivaut à

$$\hat{M} \in \Re H_\infty$$

et

$$\sup_{\omega} \mu_{\mathbf{\Delta}}(\hat{M}(i\omega)) < 1." \tag{3.69}$$

On remarque que la condition (3.69) est de la même forme que (3.67). Autrement dit, le "Main Loop Theorem" a permis d'établir l'équivalence entre le problème de performance robuste et un problème de stabilité robuste fictif. Ce problème de stabilité robuste concerne la stabilité du système bouclé de la figure 3.18.

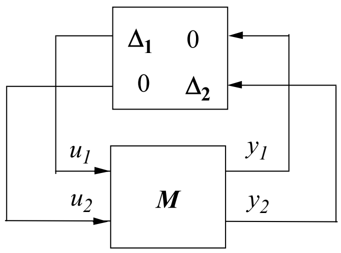


Figure 3.18 *- Problème de stabilité robuste fictif*

Prenons l'exemple d'un système multivariable, dont la matrice de transfert nominale est P, et qui a une incertitude multiplicative en entrée, de sorte que le système perturbé a une matrice de transfert $\tilde{P} = P\,(I + W_2\,\Delta_2)$, où Δ_2 est une incertitude structurée satisfaisant la condition (3.68) ; la valeur singulière structurée correspondant à cette structure sera notée μ_2. La pondération fréquentielle W_2 est supposée rationnelle et stable. Supposons d'autre part qu'une perturbation extérieure s'ajoute à la sortie de ce système, et qu'on souhaite la rejeter suffisamment ; ce rejet de perturbation sera supposé spécifié par une condition de la forme $\| \tilde{S}_s W_1 \|_\infty < 1$, où $\tilde{S}_s$ désigne la matrice de sensibilité en sortie **du système perturbé** (et c'est ce qui fait qu'on se pose ici un problème de performance robuste). Alors, d'après le Théorème 3.6b, on associera à ce problème de performance robuste le problème de stabilité robuste représenté par le schéma de la figure 3.19.

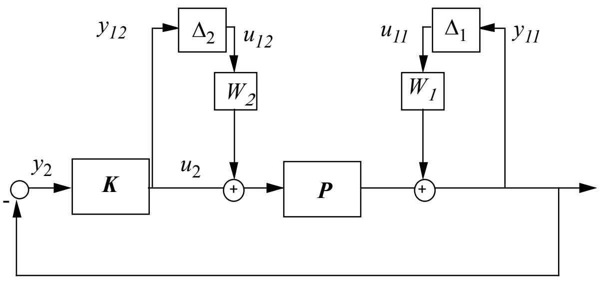


Figure 3.19 *- Représentation du problème de performance robuste*

On aura donc résolu ce problème de performance robuste lorqu'on aura trouvé un régulateur ***K*** pour lequel on aura $F_b(P_a, K) \in \Re H_\infty$ et

$$\sup_\omega \ \mu_{\mathbf{\Delta}} (F_b(P_a, K)(i\omega)) < 1 \tag{3.70}$$

où P_a désigne la matrice de transfert du système augmenté (voir Section 3.1) et où $\mu_{\mathbf{\Delta}}$ est la valeur singulière structurée correspondant à la "structure augmentée" **Δ**. On aboutit donc à un problème de **µ-synthèse**. On vérifie facilement que dans le cas présent, on a $F_b(P_a, K) = \begin{pmatrix} -T_e W_1 & -K S_s W_2 \\ S_s P W_1 & S_s W_2 \end{pmatrix}$.

"µ-analyse" :

Le calcul exact de µ est difficile à faire dans le cas général. On peut montrer le résultat suivant : soit **D** l'ensemble des matrices carrées inversibles de dimension n, commutant avec les matrices Δ de **Δ**, c'est-à-dire de la forme

$$D = \mathrm{diag}(D_1, \dots, D_l, d_{l+1} I_{n_1}, \dots, d_{l+m} I_{n_m}).$$

Alors, la quantité

$$\mu^*_{\mathbf{\Delta}}(M) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}\left(D^{-1} M D\right)$$

est un majorant de $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$. Ce majorant est évidemment moins conservatif que $\bar{\sigma}(M)$, et l'écart entre $\mu_{\mathbf{\Delta}}(M)$ et $\mu^*_{\mathbf{\Delta}}(M)$ est en général faible (il est nul dans le cas de certaines structures : voir [Doy 82]). L'intérêt du majorant $\mu^*_{\mathbf{\Delta}}$ réside dans le fait qu'il est beaucoup plus facilement calculable que $\mu_{\mathbf{\Delta}}$. En effet, on montre que le calcul du "scaling optimal" D pour lequel on obtient la borne inférieure (3.71) est convexe [Tsi 90], bien que non différentiable. En pratique, la "μ-analyse" se ramène donc à un problème d'optimisation de "scalings" ; elle ressemble en cela à la "Q-analyse", mais avec la différence que dans le cadre de μ, on travaille fréquence à fréquence, puisqu'on cherche à vérifier si une inégalité de la forme (3.69) est satisfaite.

"*μ-synthèse*" :

Comme on l'a vu, le problème de μ-synthèse consiste à concevoir un régulateur satisfaisant une condition de la forme (3.70). On ne sait pas résoudre ce problème de manière exacte. Une procédure possible pour résoudre ce problème de manière approchée consiste à procéder par "*D-K* itérations", comme pour la Q-synthèse. La différence, ici, consiste dans le calcul du "scaling" D. A l'étape n, la méthode consiste à se fixer un échantillonnage en fréquences $\{\omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ \}$, et à déterminer à chaque fréquence ω_j une matrice D_j minimisant dans $\mathbf{D}$ la quantité $\bar{\sigma}(D_j^{-1} F_b(P_a, K_{n-1})(i\omega_j)D_j)$, où K_{n-1} est le régulateur qui a été calculé à l'étape $n-1$. On détermine ensuite une matrice de transfert D, stable et à inverse stable, et interpolant les D_j , c'est-à-dire telle que $D(i\omega_j)=D_j$. Il reste alors à "augmenter" P_a par ce "scaling" D, comme on l'a fait pour la Q-synthèse, puis à calculer K_n en résolvant le problème standard.

Comme pour la Q-synthèse, on de dispose pas de garanties de convergence pour cette procédure itérative. Le problème global de la μ-synthèse n'étant pas convexe, on peut d'autre part converger vers un optimum local. La μ-synthèse est en principe moins conservative que la Q-synthèse, mais cela est au prix d'un régulateur final d'ordre plus élevé, puisque qu'en "augmentant" P_a, on rajoute des états supplémentaires qui sont ceux de D (dans le cas de la Q-synthèse, le "scaling" est une matrice constante, et il n'y a donc pas d'augmentation d'ordre). Il convient de signaler qu'il y a bien souvent peu de différence entre les résultats obtenus par μ-synthèse et par Q-synthèse (voir par exemple [Aïo 93]).

Le problème des erreurs paramétriques réelles :

Dans la définition de μ qui a été prise, les coefficients de l'incertitude Δ sont supposés complexes ; or, des d'erreurs paramétriques sont nécessairement réelles. Une représentation complexe de ces erreurs est donc conservative. La définition d'une "valeur singulière structurée mixte" (réelle/complexe) avait été proposée par Doyle dès 1985 [Doy 85]. La difficulté (en ce qui concerne la μ-analyse mixte) restait de pouvoir calculer cette quantité, éventuellement de manière approchée. Beaucoup d'efforts ont été réalisés récemment dans ce sens [Sid 90], [You 91], [Fan 91], [Chi 92], et des algorithmes existent aujourd'hui [Saf 93]. Le problème de la "μ-synthèse mixte" reste une difficuté majeure, étant donné notamment le caractère hautement non convexe du problème. Une approche par *D-K* itérations est proposée dans le logiciel [Chi 92], mais il reste à en évaluer l'efficacité. Ce problème est encore largement ouvert.

3.5. Application à l'asservissement d'un bras flexible

3.5.1 Présentation du système

Le système est un bras flexible, d'une longueur d'un mètre, fixé par une de ses extrémités à un axe vertical. Cet axe peut être mis en rotation par un moteur à courant continu, faisant alors décrire au bras un mouvement circulaire dans le plan horizontal (figure 3.20). L'extrémité libre du bras peut recevoir une charge dont la masse varie de 0 à 75 g et la position de cette extrémité est mesurée par un capteur I.R. Ce système a donc pour entrée, la commande u de l'asservissement analogique de position de l'axe du moteur, et pour sortie y , la position de l'extrémité libre du bras, mesurée par le capteur.

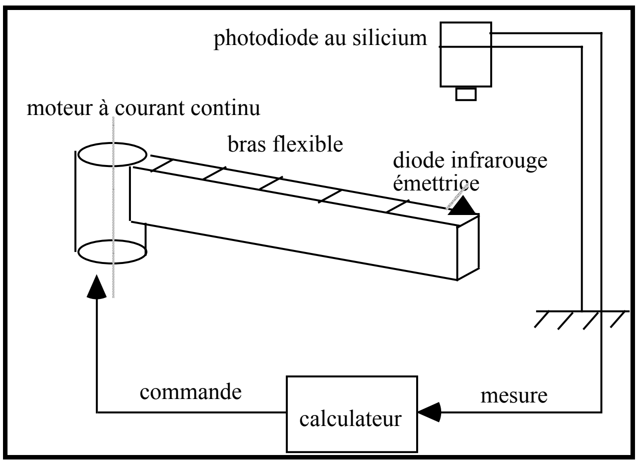


***Figure 3.20** - Dispositif expérimental du bras flexible*

3.5.2 Spécifications de l'asservissement

Avec les notations de la figure 3.1, les spécifications de l'asservissement sont les suivantes :

3.5.2.1 Spécifications des performances

- Réaliser en sortie y du système le suivi d'un échelon de consigne et le rejet d'une perturbation d_y en échelon. La durée du transitoire nécessaire au rejet de la perturbation est de 2.4 s.

- Eviter la simplification des pôles oscillants peu amortis du système par des zéros du régulateur (voir § 3.2.4).

- Atténuer l'effet du bruit de mesure b sur u.

3.5.2.2 Spécifications de la robustesse

- Obtenir une marge de module supérieure à -6 dB et une marge de retard supérieure à la période d'échantillonnage T_e=70 ms.

- Garantir la robustesse de la stabilité en boucle fermée vis-à-vis des modes négligés, en dehors de la bande de fréquences dans laquelle le système est correctement approximé par son modèle réduit. On notera $[0, f_h]$ cette bande de fréquences.

- Enfin, garantir la robustesse de la stabilité vis-à-vis des incertitudes, dues aux variations de la charge, sur les modes du système (fréquences propres non amorties, facteurs d'amortissement) dans la bande $[0, f_h]$.

3.5.3 Modélisation du système

3.5.3.1 Modèles de simulation à temps discret

On dispose de trois modèles à temps discret du système, obtenus pour différentes valeurs de la charge (sans charge, charge de 25 g et charge de 75 g).

Ces modèles sont décrits par leur fonction de transfert qui est de la forme :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{5} b_{5-k}\, z^k}{\sum_{k=0}^{6} a_{6-k}\, z^k}$$

où les coefficients a_k et b_k prennent les valeurs résumées dans le tableau 3.1.

Charge Coefficients	sans charge	25 g	75 g
b_0	0	0	0
b_1	0.054037	0.0393523	0.0390205
b_2	-0.162508	-0.116242	-0.098099
b_3	0.261206	0.178397	0.0972530
b_4	-0.134469	-0.0893726	0.0260669
b_5	0.0256689	0.0139438	-0.0447154
a_0	1	1	1
a_1	-2.14437	-2.45389	-1.96501
a_2	1.75906	2.27894	0.45148
a_3	-0.961539	-1.02085	1.33546
a_4	1.20525	0.628664	-0.438726
a_5	-1.54819	-0.85989	-0.97402
a_6	0.774686	0.474607	0.626318

Tableau 3.1 *- Coefficients des fonctions de transfert à temps discret modélisant le bras flexible (sans charge, avec une charge de 25 g, avec une charge de 75 g).*

Les diagrammes de Bode de ces fonctions de transfert sont représentés sur la figure 3.21.

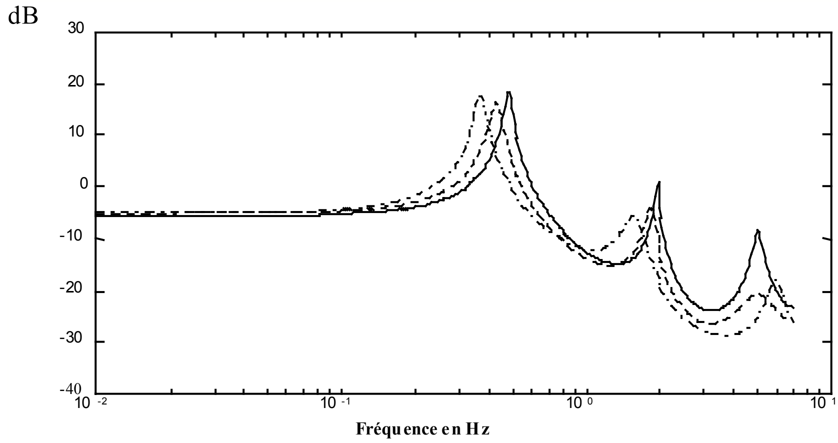


***Figure 3.21 -** Lieux de Bode des fonctions de transfert à temps discret modélisant le bras flexible*
(- sans charge, -- avec une charge de 25 g, .- avec une charge de 75 g).

3.5.3.2 Modèle de simulation à temps continu

L'algorithme de Glover-Doyle présenté dans la section 3.3 s'applique aux systèmes à temps continu. Or, le système à régler considéré ici est représenté en tant que système à temps discret. Il est à noter que des articles très récents donnent directement la solution du "γ-problème" H_∞ pour les systèmes à temps discret [Igl 91], [Sto 92a], [Ion 93]. Mais il est également possible de continuer d'utiliser l'algorithme de Glover-Doyle, à condition de transformer le problème à temps discret originel en un "pseudo-problème" à temps continu au moyen d'une transformation bilinéaire, de la forme :

$$s = k\frac{z-1}{z+1}\ ,\ k>0 \tag{3.72}$$

Une telle transformation a en effet la particularité de préserver la norme H_∞ dans le sens suivant : soit $G(z)$ une fonction de transfert à temps discret, et $\hat{G}(s)$ la fonction de transfert à temps continu, obtenue par la transformation (3.72).

Par définition, $\hat{G}$ appartient à H_∞ si la quantité $\|\hat{G}\|_\infty$, définie suivant (3.75), est finie ; d'autre part, G appartient par définition à H_∞ si $\|G\|_\infty = \sup_{|z|>1} \bar{\sigma}(G(z)) < +\infty$. On montre facilement le résultat suivant :

G appartient à H_∞ si et seulement si $\hat{G}$ appartient à H_∞, et $\|\hat{G}\|_\infty = \|G\|_\infty$.

Il est plus commode de choisir le facteur k de (3.72) de façon que le “pseudo-problème” à temps continu ait une signification physique concrète. Le facteur est donc choisi de la forme :

$$k = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_0 T_e}{2}\right)}$$

La transformation (3.72) est alors appelée la “ transformation de Tustin” (ou “transformation en w”) avec “prewarping” [Ast 84]. Elle est telle que $G(e^{i\omega T_e}) = \hat{G}(i\omega)$ pour $\omega = \omega_0$.

Le modèle de synthèse à temps continu est donc obtenu de la façon suivante :

- On considère d'abord comme modèle du système celui obtenu pour une charge de 25 g car il représente un "comportement moyen" du bras flexible. Toutefois, afin d'améliorer la robustesse paramétrique du régulateur qui sera obtenu à partir de ce modèle, on modifie la fréquence propre non amortie et le facteur d'amortissement du 1er mode, de façon à augmenter l'amplitude du premier pic de résonance.

- On applique ensuite à ce modèle à temps discret une transformation en *w* avec “prewarping” à la fréquence f_p=1.8 Hz, où $f_p = \frac{\omega_0}{2\pi}$. En effet, pour cette valeur de f_p, on observe sur la figure 3.22 que la réponse fréquentielle du modèle à temps continu approxime de façon satisfaisante celle du modèle à temps discret dans la bande [0,3] Hz.

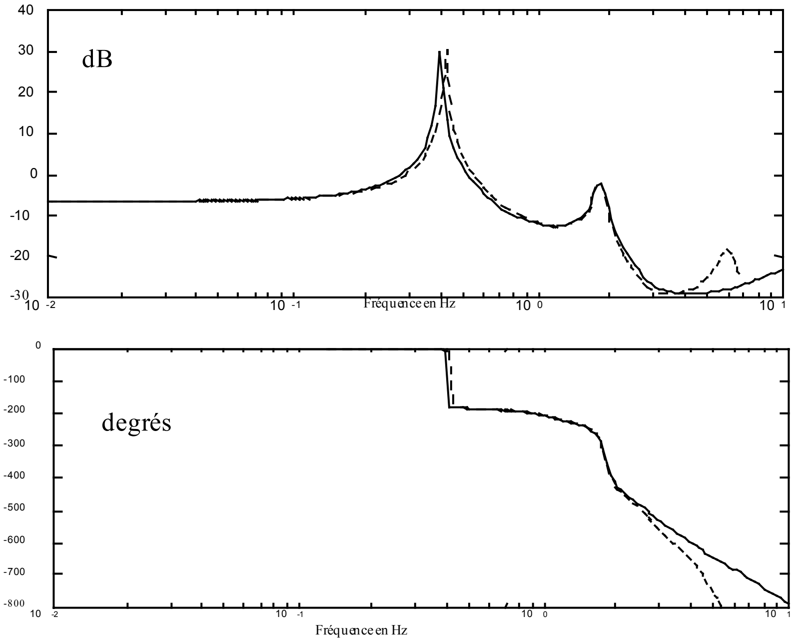


Figure 3.22 *- Lieux de Bode des fonctions de transfert à temps discret (-) et à temps continu (--) du modèle de synthèse initial.*

- Puis, on met en série avec ce modèle à temps continu, un retard d'une période d'échantillonnage, représenté par une approximation de Pade d'ordre 2. Ce retard permettra d'obtenir, comme nous le verrons ultérieurement, un régulateur à temps discret strictement propre.

- On procède enfin à une réduction à l'ordre 6 de ce modèle en l'approximant dans la bande de fréquences [0,3] Hz, de façon à ne représenter que les deux premiers modes du système. Le troisième mode du système sera négligé, et ne sera pris en compte lors de la synthèse du régulateur que sous forme d'une erreur additive vis-à-vis de laquelle on robustifiera la régulation. On note $H_r(s)$ ce modèle réduit du 6ème ordre. Cette démarche est résumée par le schéma de la figure 3.23.

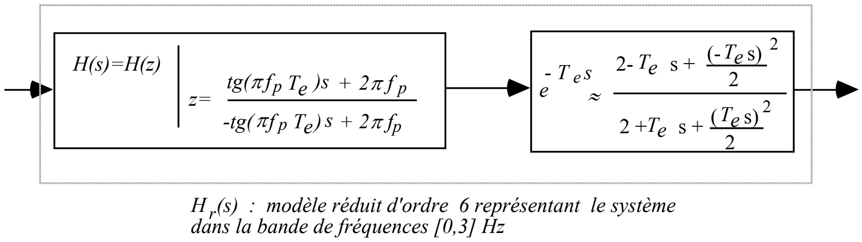


Figure 3.23 *- Modèle de synthèse à temps continu du système.*

Les coefficients de la fonction de transfert $H_r(s) = \frac{\sum_{k=0}^{6} b_{6-k} s^k}{\sum_{k=0}^{6} a_{6-k} s^k}$ sont donnés dans le tableau 3.2.

coefficients		coefficients	
b_0	5.044966e-2	a_0	1
b_1	8.440841	a_1	86.89868
b_2	-138.8694	a_2	2686.414
b_3	3262.227	a_3	14558.52
b_4	-27579.23	a_4	334366.2
b_5	47775.42	a_5	90002.86
b_6	940203.8	a_6	2004680

Tableau 3.2 *- Coefficients de la fonction de transfert à temps continu H_r .*

3.5.4 Choix des gabarits fréquentiels et synthèse du régulateur

Afin de prendre en compte les spécifications de l'asservissement dans la synthèse du compensateur, on augmente le modèle réduit du système par les gabarits de pondération fréquentielle suivants :

- La contrainte de rejet de perturbation est prise en compte en pondérant la fonction de sensibilité S par le gabarit de pondération fréquentielle W_2, dont le lieu de Bode est représenté sur la figure 3.24. Cette contrainte s'exprime en imposant au gain de W_2 d'avoir un comportement de type intégrateur en basse fréquence. (La contrainte de suivi de consigne sera prise en compte lors de la synthèse du précompensateur). Pour des valeurs de la fréquence inférieures à environ 0.4 Hz, cette contrainte sur S permet de garantir une marge de module de -6 dB pour le modèle nominal.

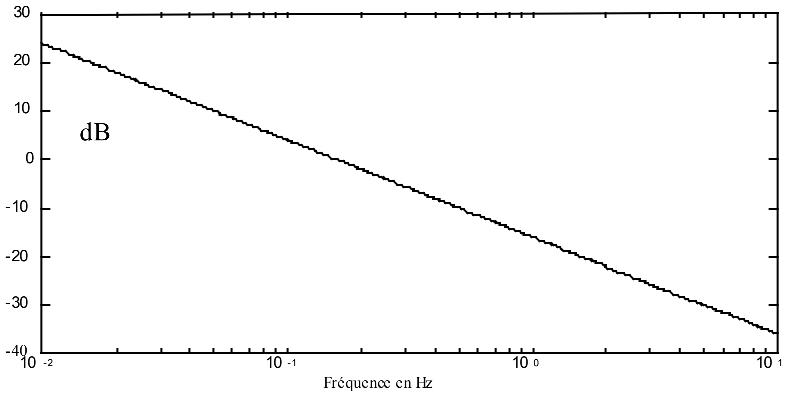


Figure 3.24 *- Lieu fréquentiel en amplitude de W_2 .*

- Les contraintes de robustesse vis-à-vis des modes négligés en haute fréquence et de faible gain du régulateur en haute fréquence se traduisent par le gabarit de pondération W_4, portant sur la fonction de sensibilité KS et dont le lieu de Bode est représenté sur la figure 3.25.

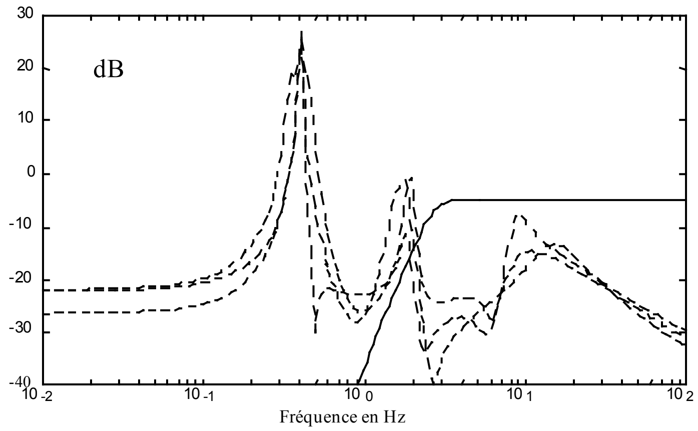


Figure 3.25 *- Lieux fréquentiels en amplitude des erreurs additives pour chacun des modèles (--) et du gabarit de pondération W_4 (-).*

- La contrainte de marge de module supérieure à -6 dB est spécifiée, au-delà d'environ 0.4 Hz, par le gabarit de pondération fréquentielle W_1 portant sur T et dont le lieu de Bode est représenté sur la figure 3.26.

Cette contrainte sur T permet aussi d'interdire au lieu de Nyquist de pénétrer dans le demi-plan à gauche de la droite Partie Réelle = -0.5, et impose donc au régulateur d'être stable.

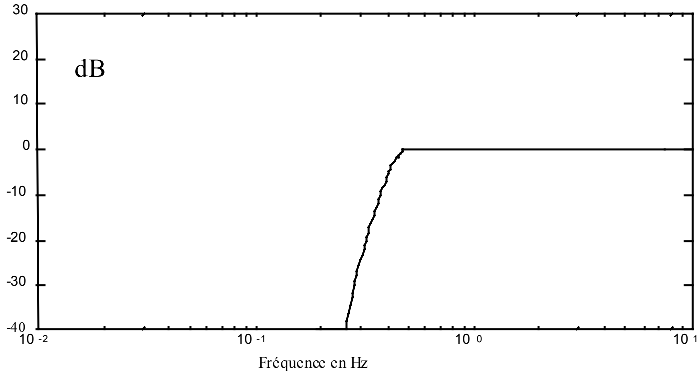


Figure 3.26 *- Lieu fréquentiel en amplitude du gabarit de pondération W_1 (-).*

- La contrainte de non-simplification des pôles associés au premier et au second modes du système par des zéros du régulateur se traduit par deux gabarits de pondération fréquentielle constants W_{31} et W_{32} dont les valeurs sont maximisées (optimisation des performances) [Cou 93]. Ces gabarits portent respectivement sur les fonctions de sensibilité P_1S et P_2S où P_1 et P_2 sont les cellules du second ordre associées aux deux premiers modes [Cou 93]. En appliquant l'algorithme de synthèse H_∞ avec optimisation des performances, on obtient une solution optimale au problème posé pour W_{31} = -9.45 dB et W_{32} = 8 dB.

Le régulateur ainsi obtenu est d'ordre 20 mais il peut être réduit à l'ordre 8 par suppression des modes stables peu commandables ou peu observables. On note $K_1 = \frac{n_r}{d_r}$ ce régulateur d'ordre 8.

3.5.5 Discrétisation du régulateur

Le régulateur à temps discret est obtenu par la mise en série de la transformée inverse en w avec "prewarping" du régulateur K_1, et du retard d'une période d'échantillonnage, pris en compte lors de la synthèse du régulateur. Ce régulateur est donc strictement propre. On désigne par $\frac{n_{rd}}{d_{rd}}$ la fonction de transfert ainsi obtenue.

On observe sur la figure 3.27 que la réponse fréquentielle du régulateur à temps discret approxime de façon satisfaisante celle du régulateur à temps continu avec retard dans la bande [0,3] Hz.

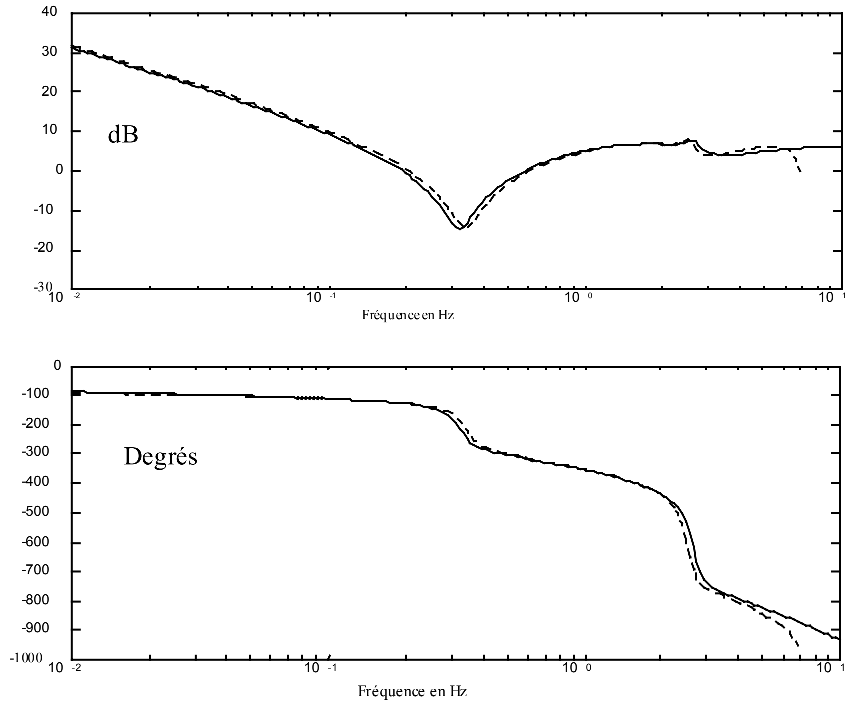


Figure 3.27 *- Lieux de Bode des fonctions de transfert à temps discret* $\frac{n_{rd}}{d_{rd}}$ *(--)*

et à temps continu $\frac{n_r}{d_r}$ *(-) du régulateur*

3.5.6 Calcul du précompensateur

On cherche un précompensateur, de fonction de transfert f_{Td}, tel que la réponse du système en boucle fermée à un échelon $r(t)$ de consigne tende vers la valeur de consigne en régime permanent et soit non oscillante en régime transitoire. Pour cela, on procède de la façon suivante :

α) On identifie, dans la bande de fréquence [0,0.3] Hz, la fonction de transfert $\frac{b_d}{a_d\, d_{rd}+b_d\, n_{rd}}$ par un modèle du premier ordre, où $\frac{b_d}{a_d}$ est la fonction de transfert à temps discret du système sans la charge. Soit $\frac{b_i}{a_i}$ le transfert identifié et b_{is} le polynôme stable, obtenu par factorisation spectrale à partir de b_i.

β) On pose $f_{Td1} = \frac{a_i}{b_{is}}$. On a donc $f_{Td1} \frac{b_d}{a_d\, d_{rd}+b_d\, n_{rd}} \approx 1$ dans la bande passante dans laquelle l'approximation est correcte.

γ) Afin d'imposer un comportement du premier ordre à l'erreur de poursuite, avec une constante de temps suffisamment faible, on va enfin multiplier le précompensateur f_{Td1} par une avance de phase permettant de régler cette constante de temps. Soit f_{Td} le précompensateur du second ordre ainsi obtenu. Si l'on note n_{Td} et d_{Td} le numérateur et le dénominateur de f_{Td}, l'expression de la commande est finalement : $\mathbb{S}\, u = - \mathbb{R}\, y + \mathbb{T}\, r$, où $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ sont définis par : $\mathbb{R} = n_{rd}\, d_{Td}$, $\mathbb{S} = d_{rd}\, d_{Td}$, $\mathbb{T} = T n_{Td}$. Les coefficients de ces polynômes sont donnés dans le tableau 3.3 (l'indice 0 correspondant au terme de plus haut degré en z).

coef. de $\mathbb{S}$	valeur des coefficients de $\mathbb{S}$	coef. de $\mathbb{R}$	valeur des coefficients de $\mathbb{R}$	coef. de $\mathbb{T}$	
s_0	1	r_0	0	t_0	0.0058940256
s_1	-4.984432733	r_1	1.3311880055	t_1	-0.0108714168
s_2	10.864223921	r_2	-6.840646468	t_2	0.00500446956
s_3	-13.279723893	r_3	15.339447129	t_3	0
s_4	8.8277470347	r_4	-18.70762203	t_4	0
s_5	-0.8743160537	r_5	10.092418422	t_5	0
s_6	-4.2188988210	r_6	6.0189086127	t_6	0
s_7	4.33693884614	r_7	-16.86183993	t_7	0
s_8	-2.2452883123	r_8	16.226600144	t_8	0
s_9	0.66478220886	r_9	-9.345584379	t_9	0
s_{10}	-0.0910321987	r_{10}	3.3027732846	t_{10}	0
s_{11}	0	r_{11}	-0.555615708	t_{11}	0

Tableau 3.3 *- coefficients de la matrice de transfert du compensateur K_d .*

3.5.7 Analyse des performances et de la robustesse du régulateur

Pour analyser la robustesse du régulateur vis-à-vis des dynamiques négligées et des incertitudes paramétriques sur les deux premiers modes, on représente les lieux de Nyquist des trois modèles à temps discret d'ordre 6 mis en série avec le régulateur $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{S}}$ (figures 3.28, 3.29 et 3.30) .

Ces lieux sont des lieux de "lin-Log-Nyquist", obtenus en modifiant, de la façon suivante, le module dans le plan complexe des points du lieu de Nyquist : si r est le module d'un point du lieu, on remplacera r par 1+Log(r) si $r > 1$, et on le laissera inchangé sinon.

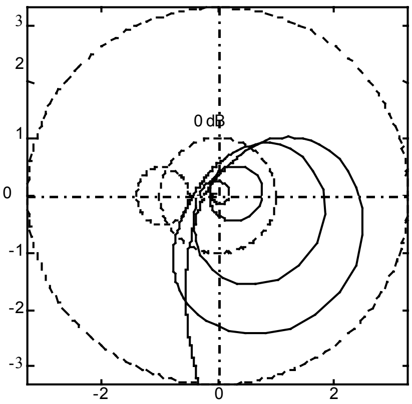


Figure 3.28 *- Lieu de lin-Log-Nyquist du modèle sans charge*

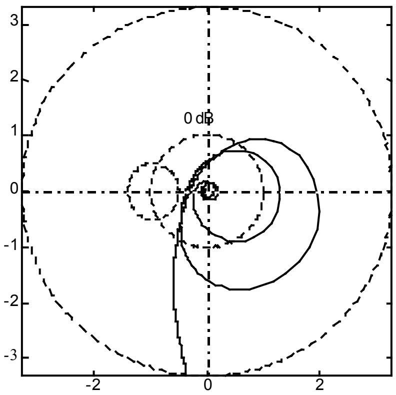


Figure 3.29 *- Lieu de lin-Log-Nyquist du modèle avec une charge de 25 g*

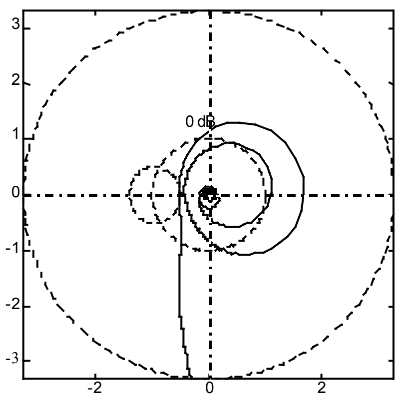


Figure 3.30 *- Lieu de lin-Log-Nyquist du modèle avec une charge de 75g*

Ces lieux montrent d'une part que la contrainte sur la marge de module est satisfaite pour les trois modèles car les lieux sont extérieurs au cercle de centre -1 et de rayon -6 dB représenté en pointillé. D'autre part, les marges de retard obtenues pour les modèles sans charge, avec une charge de 25 g et avec une charge de 75 g sont respectivement 93,3 ms, 166 ms et 271,1 ms et sont donc toutes supérieures à la période d'échantillonnage de 70 ms.

Pour analyser les performances, on peut tout d'abord représenter le lieu de Bode de la fonction de sensibilité S pour les trois modèles du système (figure 3.31).

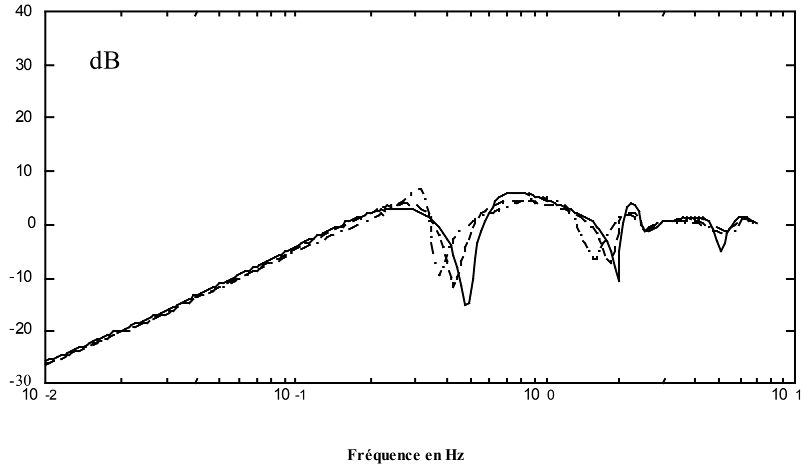
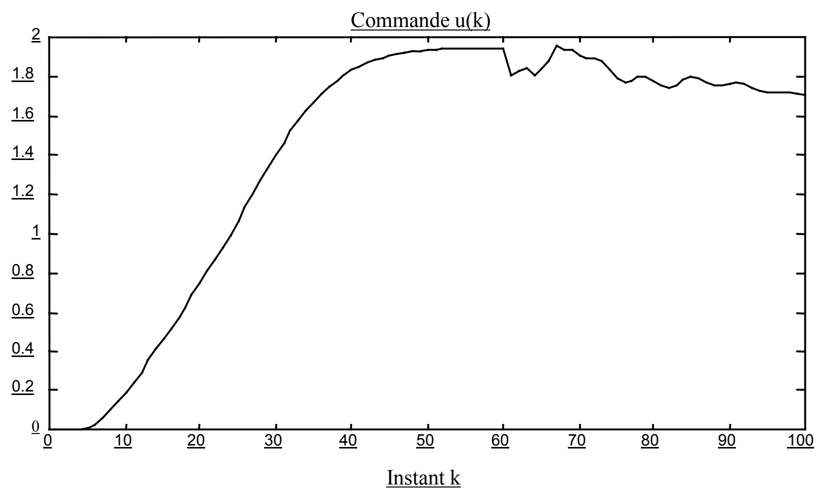
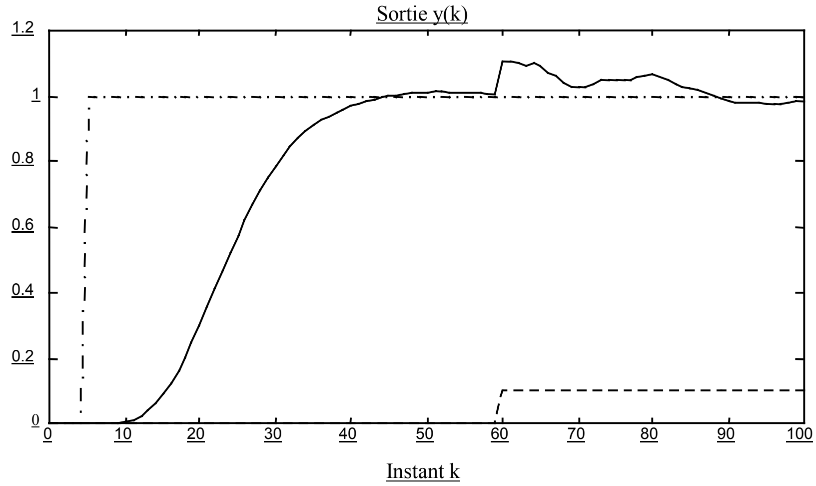


Figure 3.31 *- Lieux de Bode de la fonction de sensibilité S pour les trois modèles (- sans charge, -- avec une charge de 25 g, .- avec une charge de 75 g).*

On observe que les trois fonctions de sensibilité *S* ont un zéro à l'origine et donc que le suivi de consigne est obtenu dans les trois cas.

D'autre part, considérons la réponse temporelle du modèle sans charge en boucle fermée (figure 3.32), lorsque celui-ci est soumis d'une part à un échelon de consigne d'amplitude 1, retardé de 5 périodes d'échantillonnage et d'autre part à une perturbation en échelon d'amplitude 0.1, retardée de 60 périodes d'échantillonnage : on observe que la perturbation est rejetée quasiment en 2.4 s.





(- - perturbation, - . consigne, - sortie du modèle)

***Figure 3.32** - Simulation temporelle du modèle sans charge en boucle fermée.*

3.6 - Conclusion

Essayons à présent de faire un bilan succinct de « l'approche H_∞ ».

- Tout d'abord, un point essentiel est que ce nouveau cadre a permis de "réhabiliter" la représentation fréquentielle ; celle-ci, en effet, avait été supplantée depuis les années 60 par la représentation temporelle, avec l'apparition de la représentation d'état, de la commande optimale, de la commande adaptative, etc. Et beaucoup d'Automaticiens étaient près de penser que le fréquentiel était désormais d'un autre âge, tout juste une antiquité.

- En fait, le fréquentiel permet d'énoncer clairement un théorème fondamental de l'Automatique : pour qu'un régulateur soit performant, il doit avoir du grand gain ; et pour qu'il soit robuste, il doit avoir du petit gain. D'où la nécessité de pouvoir séparer deux sous-ensembles : celui où l'on connaît bien le système, et où l'on pourra obtenir des performances par du grand gain ; et celui où on le connaît mal, et où le régulateur doit présenter du petit gain. L'approche H_∞ est bien adaptée pour réaliser cette "mise en forme" du gain de boucle ("loop-shaping") lorsque cette séparation peut être faite dans le domaine des fréquences, ce qui est bien souvent le cas. Tenter de réaliser une synthèse de régulateur sans avoir en tête ce concept fondamental relève du pur acte de foi.

- Un autre apport essentiel de cette approche est la mise en évidence de l'importance des fonctions de sensibilité. Toute performance s'exprimant en terme de rejet de perturbation, se traduit directement par une caractéristique que doit présenter la fonction de sensibilité correspondante. Cette notion n'est pas nouvelle, puisqu'elle remonte à Bode. Mais H_∞ en a répandu l'usage. Le réflexe de tracer les fonctions de sensibilité importantes lors de la conception d'un régulateur, devrait être aujourd'hui aussi naturel que celui de visualiser le gabarit d'un filtre pour un traiteur de signal.

- Cela dit, tout ceci peut être fait sans recourir aux mathématiques et aux algorithmes de H_∞ ; simplement, ceux-ci peuvent être commodes et efficaces, comme on l'a vu à propos de l'application au bras souple.

- On peut donc dire sans exagération que pour tout ingénieur automaticien d'aujourd'hui, la « culture H_∞ » est nécessaire.

3.7 - Annexe : Théorèmes de stabilité et espace H_∞

Espace L_2 : L_2 est l'espace des fonctions $x : \Re \rightarrow \Re$, mesurables (au sens de Lebesgue) et telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt < \infty$$

Cette définition (de même que celles qui suivent) peut évidemment s'étendre au cas de fonctions vectorielles, à condition de remplacer la valeur absolue de $x(t)$ par sa norme euclidienne, ainsi qu'au cas de fonctions à valeurs complexes (la valeur absolue étant alors remplacée par le module). Si ξ désigne un vecteur de $\Re^n$, nous noterons simplement $|\xi|$ sa norme euclidienne. Si x est à valeur dans $\Re^n$, l'espace L_2 correspondant est alors noté L_2^n .

L'intégrale ci-dessus est le carré de la norme de x dans L_2, qui est un espace de Hilbert. La norme de x dans L_2 sera notée $\|x\|$.

Opérateur de troncature : soit T un réel. On note P_T l'opérateur défini sur l'ensemble des fonctions définies sur $\Re$, et éventuellement à valeurs vectorielles, telles que :

$$(P_T x)(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } t < T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Espace L_2 étendu (L_{2e}) [Des 75] : L_{2e}^n désigne l'espace des fonctions x telles que pour tout réel T, $P_T\, x$ appartient à L_2^n . Quand il n'y a pas d'ambiguïté, les espaces L_{2e}^n et L_2^n seront notés respectivement L_{2e} et L_2 .

Bien souvent, on suppose tous les signaux nuls avant un instant initial t_0 (par exemple égal à 0) ; dans ce cas, les signaux suffisamment "réguliers" (par exemple continus par morceaux) appartiennent à L_{2e}. En revanche, seuls les signaux d'énergie finie appartiennent à L_2 . Autrement dit, l'espace L_2 convient bien dès qu'il s'agit de décrire des signaux engendrés par des systèmes stables. Mais il est essentiel « d'étendre » L_2, comme cela a été fait ci-dessus, pour étudier ou simplement définir la notion de stabilité elle-même.

Pour $x \in L_{2e}$ et $T \in \Re$, on notera $\|x\|_T$ la quantité $\|P_T\, x\|$.

Causalité et stationnarité d'un opérateur: Soit $\boldsymbol{G}$ un opérateur de L_{2e} dans L_{2e} ; $\boldsymbol{G}$ est causal, si pour toute entrée x et pour tout instant t, $(\boldsymbol{G}\,x)(t)$ ne dépend que des valeurs $x(\tau)$, $\tau \leq t$; autrement dit si on a la relation $P_t\,\boldsymbol{G} = P_t\,\boldsymbol{G}\,P_t$, quel que soit t.

Soit $\boldsymbol{R_\tau}$ l'opérateur de retard, tel que si x désigne un signal temporel, on a $(\boldsymbol{R_\tau}\,x)(t) = x(t - \tau)$. Alors, un opérateur $\boldsymbol{G}$ est stationnaire, si quel que soit τ, $\boldsymbol{R_\tau}\,\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{R_\tau}$.

• Système et opérateur entrée-sortie associé. Considérons un système Σ :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathrm{f}(x(t),u(t),t) \\ y(t) &= \mathrm{g}(x(t),u(t),t) \end{aligned}$$

où $\mathrm{f} : \mathrm{E} \times \Re^m \times \Re^+ \to \mathrm{E}$ et $\mathrm{g} : \mathrm{E} \times \Re^m \times \Re^+ \to \Re^p$ sont des fonctions lipschitziennes [Vid 93], E désignant un espace de Banach, qui est l'espace d'état ; m et p sont respectivement les dimensions de la commande u et de la sortie y. Supposons de plus que 0 soit un point d'équilibre c'est-à-dire que l'on ait :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(0,0,t)&=0 \\ \mathrm{g}(0,0,t)&=0 \end{aligned}\right. \quad \forall\, t \in \Re^+$$

L'état $x(t)$ et la sortie $y(t)$ à l'instant t dépendent alors de l'état initial $x_0 = x(0)$, de la restriction de la commande à l'intervalle $[0,t]$, notée $u|_{[0,t]}$, ainsi que de t.

Supposons que **l'état initial soit nul**. Alors, y(t) n'est plus fonction que de $u|_{[0,t]}$ et de t. La fonction $u : \Re^+ \to \Re^m$ étant fixée, la fonction $y : \Re^+ \to \Re^p$ est donc déterminée de manière unique. De plus, si $u \in L_{2e}^m$, alors $y \in L_{2e}^p$ [Vid 93, Sec. 6.3, Théorème 15]. Autrement dit, il existe un opérateur $\boldsymbol{G} : L_{2e} \to L_{2e}$ tel que $y = \boldsymbol{G}\ u$. D'après ce qui précède, cet opérateur est causal. Il est de plus stationnaire si f et g ne dépendent pas explicitement de t. Cet opérateur $\boldsymbol{G}$ est appelé **l'opérateur entrée-sortie associé au système Σ** [Bou 95b].

• L_2-stabilité et gain d'un système [Des 75]. Soit un système et $\boldsymbol{G}$ l' opérateur entrée-sortie qui lui est associé. On dira que ce système ou que $\boldsymbol{G}$ est L_2-stable s'il existe des constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$ telles que pour tout x dans L_{2e} et tout réel T

$$\|\boldsymbol{G}\,x\|_T \leq a\,\|x\|_T + b \tag{3.73}$$

La borne inférieure des constantes a pour lesquelles il existe une constante b telle que l'inégalité (3.73) est vérifiée pour tout x dans L_{2e} et pour tout réel T, est appelée le gain de $\boldsymbol{G}$, et est notée $\gamma(\boldsymbol{G})$.

On vérifie aisément le résultat suivant : si $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ sont les opérateurs entrée-sortie associés à deux systèmes L_2 -stables, on a

$$\gamma(\boldsymbol{G_1}\ \boldsymbol{G_2}) \leq \gamma(\boldsymbol{G_1})\ \gamma(\boldsymbol{G_2}) \tag{3.74}$$

(où $\boldsymbol{G_1}\ \boldsymbol{G_2}$ signifie le composé de $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$).

S'il existe $a > 0$ tel que l'inégalité (3.73) soit vérifiée avec $b = 0$ (pour tout x dans L_{2e} et tout réel T), on dit que G est L_2-stable **avec biais nul**. La borne inférieure $\gamma_0(\boldsymbol{G})$ de ces constantes a est alors appelée le gain de $\boldsymbol{G}$ avec biais nul. Lorsque $\boldsymbol{G}$ est causal, on peut calculer $\gamma_0(\boldsymbol{G})$ par la formule :

$$\gamma_0(\boldsymbol{G}) = \sup \left\{ \frac{\| \boldsymbol{G}\, x \|}{\|x\|} : x \in L_2 \right\}$$

Dans toute la suite, les systèmes considérés seront supposés causaux. Pour un système linéaire (**avec conditions initiales nulles**) les notions de L_2-stabilité et L_2-stabilité avec biais nul coïncident, de même que les quantités $\gamma(\boldsymbol{G})$ et $\gamma_0(\boldsymbol{G})$ qui ont alors la signification de la norme de l'opérateur $\boldsymbol{G}$, induite par la norme de L_2 .

Notons que la L_2-stabilité est une **stabilité entrée-sortie avec conditions initiales nulles**. Par exemple, considérons le système d'équation $\ddot{y} - y = \dot{u} - u$. La fonction de transfert de ce système est $\frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$. A conditions initiales nulles, on a donc $\|y\|_2 \leq \| \frac{1}{s+1} \|_\infty \|u\|_2 = \|u\|_2$ (voir § suivant), donc le **système est L_2-stable**. Si maintenant les conditions initiales ne sont pas nulles, celles-ci peuvent engendrer une sortie d'énergie infinie pour une entrée d'énergie finie [Bou 94a], donc le système **n'est pas stable au sens entrée-sortie**, si l'on prend ce terme dans une acception un peu générale. Cette différence entre **stabilité entrée-sortie avec conditions initiales nulles** et **stabilité entrée-sortie** est due à la non stabilisabilité de ce système. En effet, ce système a un mode caché instable égal à 1, qui est un zéro de découplage en entrée [Bou 95a]. La **stabilité entrée-sortie** peut elle-même se distinguer de la **stabilité interne** (stabilité asymptotique par exemple), dans le cas de systèmes non détectables.

• <u>L_2-stabilité et espace H_∞</u> [Fra 87b]

On note l'espace H_∞ des fonctions (ou de matrices de fonctions) de la variable complexe $\hat{G}\ : s \to \hat{G}(s)$ qui sont analytiques et bornées dans le demi-plan droit ouvert $R_e(s) > 0$. Cet espace peut être muni d'une norme, notée $\|.\|_\infty$, qui est définie par :

$$\|\hat{G}\|_\infty = \sup \{\bar{\sigma}(\hat{G}(s)) \ : R_e(s) > 0\} \tag{3.75}$$

Dans cette expression, $\bar{\sigma}$ dénote la plus grande valeur singulière : si A désigne une matrice à coefficients réels ou complexes, on a

$$\bar{\sigma}(A) = [\lambda_{\max}(A\,A^*)]^{\frac{1}{2}} = [\lambda_{\max}(A^*A)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.76}$$

où $\lambda_{\max}$ désigne la plus grande valeur propre, et $(.)^*$ la transposée conjuguée de (.). Si A est un scalaire, $\bar{\sigma}(A)$ est évidemment le module de A. Plus généralement, nous noterons $\sigma_i(A)$ la racine carrée de la i-ième valeur propre non nulle de $A\,A^*$ (ou, de manière équivalente, de $A^*\,A$), ces valeurs propres étant ordonnées par valeurs décroissantes, et $\underline{\sigma}(A) = \min\{\sigma_i(A)\}$.

Nous nous limiterons dans cet exposé au cas des systèmes de dimension finie, dont la fonction (ou matrice) de transfert est une fraction rationnelle (ou dont les termes sont des fractions rationnelles) à coefficients réels, et on notera R cet ensemble de fonctions ou de matrices de fonctions ; pour une extension au cas de systèmes régis par des équations différentielles retardées, voir [Bou 94a]. On note $\Re H_\infty$ l'ensemble $H_\infty \cap R$.

Soit $\hat{G} \in R$. Alors $\hat{G} \in \Re H_\infty$ si et seulement si :

(i) $\hat{G}$ n'a pas de pôles dans le demi-plan droit fermé $\Re_e(s) \geq 0$;

(ii) $\hat{G}$ est propre, c'est-à-dire est bornée à l'infini, soit encore $\bar{\sigma}(\hat{G}(\infty)) < \infty$.

De plus, la norme de $\hat{G}$ (dans H_∞) peut se calculer en utilisant uniquement la restriction de $\hat{G}$ à l'axe imaginaire (d'après le Principe du module maximum), et l'on a :

$$\|\hat{G}\|_\infty = \sup \{\bar{\sigma}(\hat{G}(i\omega)) \ : \omega \in \Re \ \} \quad \text{si } \hat{G} \in \Re H_\infty \tag{3.77}$$

$\|\hat{G}\|_\infty = +\infty$ sinon

Dans le cas monovariable, cette quantité a une interprétation évidente dans le lieu de Bode : il s'agit du maximum atteint par le gain de $\hat{G}(i\omega)$. Insistons sur le fait qu'il ne suffit pas que cette valeur soit finie pour que $\hat{G}$ appartienne à H_∞ ; en effet, pour que ce soit le cas, il faut que, de plus, la condition (i) ci-dessus soit vérifiée.

Soit maintenant $\boldsymbol{G}$ un opérateur entrée-sortie associé à un système linéaire stationnaire de dimension finie, et $\hat{G}$ sa fonction (ou matrice) de transfert. Alors, $\boldsymbol{G}$ est L_2-stable si et seulement si $\hat{G} \in \Re H_\infty$; de plus, $\gamma(\boldsymbol{G}) = \|\hat{G}\|_\infty$.

• L_2-stabilité d'un système bouclé (cas linéaire stationnaire)

Considérons le système bouclé de la figure 3.1, où l'on suppose que $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{K}$ sont des systèmes linéaires stationnaires causaux de dimension finie. On dira que ce système est L_2-stable, si toutes les fonctions (ou matrices) de transfert intervenant dans les équations (3.1) (ou (3.7)) sont dans $\Re H_\infty$.

Critère de Nyquist : Il est bien connu que la stabilité en boucle fermée peut s'étudier en utilisant ce critère. Soient n_P et n_K le nombre de pôles à partie réelle strictement positive des fonctions de transfert P et K, et soit L la fonction de transfert de la boucle ouverte (définie suivant (3.4)). Le Critère de Nyquist s'exprime de la manière suivante dans le cas monovariable : le système bouclé de la figure 3.1 est L_2*-stable* si et seulement si le lieu de Nyquist de L [1] entoure le point -1 $n_P + n_K$ fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Notons qu'il est essentiel de compter séparément le nombre de pôles instables de P et le nombre de pôles instables de K, pour les additionner ensuite (contrairement à ce qui est proposé dans de nombreux ouvrages d'Automatique). Le résultat est différent du nombre de pôles instables de L, dans le cas où il y aurait des simplifications pôle-zéro instables entre P et K. Si cette situation se produisait, la stabilité interne ne serait pas préservée, car l'une des fonctions de transfert $K\,S$ ou $P\,S$ n'appartiendrait pas à $\Re H_\infty$. Une démonstration correcte du Critère de Nyquist (dans le cas multivariable) peut être trouvée dans [Vid 85], p. 274. Une extension au

(1) Par lieu de Nyquist de L, on entend ici l'image du "contour de Nyquist" [Mac 89] par la fonction L ; si P ou K ont des pôles sur l'axe imaginaire, la convention prise ici est que ceux-ci sont évités (grâce à des demi-cercles de rayon infiniment petit) en les laissant à gauche du contour de Nyquist.

cas où les systèmes ***P*** et ***K*** sont régis par des équations différentielles retardées (mais dans un contexte monovariable) se trouve dans [Bou 94a].

Dans le cas multivariable, le Critère de Nyquist s'énonce de manière suivante [Vid 85] :

Théorème 3.7 : "Le système de la figure 3.1 est *L_2-stable* si et seulement si le lieu de Nyquist de $\det(I + L_s)$ (ou, de manière équivalente, celui de $\det(I + L_e)$) entoure l'origine $n_P + n_K$ fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre."

Dans le cas multivariable, n_P et n_K désignent respectivement le nombre de pôles à partie réelle strictement positive des matrices de transfert P et K ; rappelons que les pôles d'une matrice de transfert se définissent à partir de sa forme de Smith-McMillan [Kai 80], [Mac 89].

• L_2-stabilité d'un système bouclé (cas non linéaire)

Considérons le système bouclé de la figure 3.33, où $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ sont des opérateurs causaux, pouvant être non linéaires.

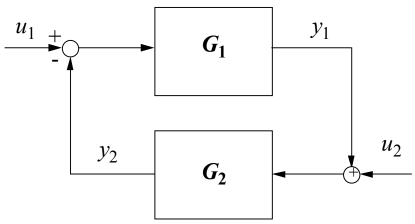


Figure 3.33 - *système bouclé*

Dans le même esprit que précédemment, nous dirons que le système bouclé de la figure 3.33 est L_2-stable, s'il existe un opérateur causal $\boldsymbol{G}$ tel que $(y_1, y_2) = \boldsymbol{G}\ (u_1, u_2)$[(2)] (on dit alors que ce système est "bien posé" [Wil 71]), et si cet opérateur est L_2-stable.

[(2)] $y = (y_1, y_2)$ est la fonction telle qu'à chaque instant t, $y(t)$ est le couple $(y_1(t), y_2(t))$. Nous emploierons indifféremment la notation "couple" (y_1, y_2), et la notation "matricielle" $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Les fonctions y_i dont il est question ici sont supposées appartenir à des espaces L_2 ou L_{2e} (L_2 étant muni d'une structure hilbertienne, comme on l'a vu plus haut). Il en va de même pour y, à condition de choisir correctement la norme dans l'espace produit (cette norme pouvant *a priori* être définie de multiples manières). Supposons que chaque fonction y_i soit dans $L_2^{n_i}$; dans ce cas, y est une fonction de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $n = n_1 + n_2$; et l'on

Théorème des Petits Gains [Zam 66], [Vid 93] :

Il s'agit du théorème de base donnant une condition suffisante de stabilité du système bouclé ci-dessus.

Théorème 3.8 : "Pour que le système bouclé de la figure 3.33 soit L_2*-stable*, il suffit que chacun des opérateurs $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ soit L_2*-stable*, et que

$$\gamma(\boldsymbol{G_1})\,\gamma(\boldsymbol{G_2}) < 1.\text{"} \tag{3.78}$$

Ce théorème admet une réciproque dans un certain nombre de cas [Dah 88], [Sha 91]. Celle qui nous sera le plus utile est la suivante [Doy 81], [Che 82] :

Théorème 3.9 : "Supposons $\boldsymbol{G_1}$ linéaire, stationnaire, de dimension finie. Alors la condition

$$\text{i)}\quad \boldsymbol{G_1} \text{ est } L_2\text{-}stable \qquad \text{ii)}\quad \|G_1\|_\infty \le 1 \tag{3.79}$$

est nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.33 soit L_2-*stable* pour tout opérateur $\boldsymbol{G_2}$ L_2*-stable* satisfaisant l'inégalité

$$\gamma(\boldsymbol{G_2}) < 1 \tag{3.80}$$

La condition nécessaire et suffisante reste vraie si l'on remplace dans (3.80) γ par γ_0, et même si on impose à $\boldsymbol{G_2}$ d'être linéaire, stationnaire et de dimension finie."

Notons que la condition nécessaire de ce théorème devient fausse si l'on remplace dans (3.79) l'inégalité large par une inégalité stricte, et inversement dans (3.80) ([Vid 93], p. 361).

Critère du Cercle [Zam 66b], [Saf 81], [Vid 93] :

Ce critère est une conséquence fort utile du Théorème des Petits Gains, qui est fondée sur l'observation que la stabilité du système bouclé de la figure 3.33 équivaut à celle du système bouclé de la figure 3.34, où c et r ont des réels (ou, dans le cas multivariable, des matrices carrées réelles de dimension convenable) tel(le)s que $I + c\,\boldsymbol{G_1}$ est inversible, ainsi que r.

---

définira la norme de y dans L_2^n suivant : $\|y\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2$. Nous procéderons de même pour les espaces L_{2e}, en faisant intervenir de plus l'opérateur de troncature.

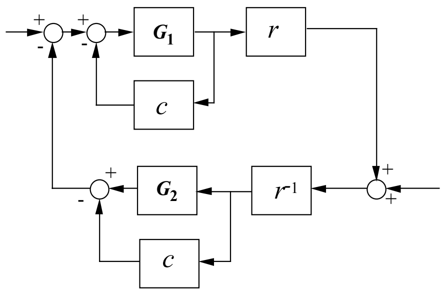


Figure 3.34 *- Schéma transformé*

En appliquant le Théorème 3.8 au schéma ci-dessus, on parvient donc au résultat suivant : une condition suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.34 soit *L_2-stable* est que les deux inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\gamma(r\, \boldsymbol{G_1}\, (I + c\ \ \boldsymbol{G_1})^{-1}) \leq 1 \tag{3.81}$$

$$\gamma((\boldsymbol{G_2} - c)\, r^{-1}) < 1 \tag{3.82}$$

Ces deux inégalités ne peuvent évidemment être satisfaites que si les deux opérateurs $\boldsymbol{G_1}\ (I + c\ \ \boldsymbol{G_1})^{-1}$ et $(\boldsymbol{G_2} - c)\ r^{-1}$ sont *L_2-stables*. Ce dernier opérateur est *L_2-stable* si et seulement si $\boldsymbol{G_2}$ est *L_2-stable*. En revanche, il n'est pas nécessaire en général que $\boldsymbol{G_1}$ soit *L_2-stable*.

<u>Notion de secteur</u> : Considérons tout d'abord l'inégalité (3.82), où γ est remplacé par γ_0. Cette inégalité signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x dans L_{2e} et pour tout réel T,

$$\|(\boldsymbol{G_2} - c)\, r^{-1})\, x\|_T^2 \leq (1 - \varepsilon)\ \|x\|_T^2 \tag{3.83}$$

Notons $<x, y>$ le produit scalaire de deux fonctions x et y dans L_2, et $<x, y>_T$ la quantité définie pour deux fonctions x et y dans L_{2e} par : $<x, y>_T\ = <P_T\, x, P_T\, y>$. D'autre part, posons $a = c - r$, $b = c + r$, et $y = r^{-1}\, x$. Alors, d'après (3.83), il est immédiat que (3.82) équivaut à l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout y dans L_{2e} et pour tout réel T,

$$<(\boldsymbol{G_2} - a)\, y, (\boldsymbol{G_2}\ - b)\, y>_T\ \leq\ - \varepsilon\ \|y\|_T^2 \tag{3.84}$$

Par définition, nous dirons alors que $\boldsymbol{G_2}$ (supposé *L_2-stable*) appartient au secteur $S(a, b)$.

Supposons par exemple que $\boldsymbol{G_2}$ soit un "opérateur sans mémoire", c'est-à-dire tel qu'il existe une fonction Φ, de $\Re \times \Re$ dans $\Re$ (ou de $\Re \times \Re^n$ dans $\Re^n$ dans le cas multivariable) telle qu'à chaque instant t, $(\boldsymbol{G_2}\ y)(t) = \Phi(y(t), t)$; dans ce cas, une condition suffisante pour que (3.84) soit vérifiée est

$$[\Phi(v, t)\ - a\ v]^{\mathrm{T}}\ [\Phi(v, t)\ - b\ v]\ \leq\ - \varepsilon\ |v|^2 \quad \forall\ v\ \in\ \Re^n\ ,\ \forall\ t \in\ \Re\ . \qquad (3.85)$$

Pour fixer les idées, considérons le cas monovariable, avec $0 < a < b$. Typiquement, la fonction Φ peut avoir un graphe tel que celui indiqué sur la figure 3.35.

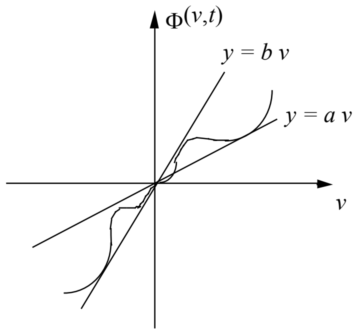


Figure 3.35 *- Secteur S(a, b) dans le cas d'un opérateur dans mémoire*

Envisageons maintenant le cas d'un **opérateur linéaire stationnaire de dimension finie**. Dans le cas multivariable, nous utiliserons la notion de **mesure** d'une matrice [Vid 93]. Soit A une matrice carrée ; alors la mesure de A est le réel $m(A)$(3) défini par :

$$m(A) = \frac{1}{2}\ \lambda_{\max}(A + A^*) \qquad (3.86)$$

Dans le cas où A est un nombre réel, on a évidemment $m(A) = \Re_e\,(A)$.

On démontre immédiatement le résultat suivant : Soit G une matrice de transfert *L_2-stable*, telle que $G(i\omega)$ est définie pour presque tout ω réel. Alors

(3) Traditionnellement, la mesure de A est notée µ(A) ; nous ne reprenons pas cette notation ici, pour ne pas créer de confusion avec la valeur singulière structurée.

$$\|G\|_\infty < 1 \text{ (rep. } \leq 1)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\underset{\omega}{ess.\sup}\,\{m([G(i\omega) - I]^*\,[G(i\omega) + I\,]\,)\,\} < 0 \text{ (rep. } \leq 0) \qquad (3.87)$$

Dans le cas où $\boldsymbol{G_2}$ est linéaire, stationnaire et L_2-*stable*, prenons $G = (G_2 - c)\, r^{-1}$; on obtient d'après (3.87) :

$$\boldsymbol{G_2} \in S(a, b)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\underset{\omega}{ess.\sup}\,\{m([G_2(i\omega)- b]^*\,[G_2(i\omega) - a])\} < 0 \qquad (3.88)$$

Considérons par exemple le cas monovariable où $\boldsymbol{G_2}$ est un simple opérateur de déphasage, de matrice de transfert $G = e^{-i\phi}$. D'après (3.88), $\boldsymbol{G_2} \in S(a, b)$ si et seulement si $(a + b) \cos \phi > 1 + a\, b$. Si $0 < a < b$, ceci équivaut encore à

$$|\phi| < \arccos\left(\frac{1 + a\,b}{a + b}\right). \qquad (3.89)$$

Ce résultat s'étend au cas multivariable, lorsque $G = \mathrm{diag}(e^{-i\phi_j})$, a = $\mathrm{diag}(a_j)$ et b = $\mathrm{diag}(b_j)$, avec $0 < a_j < b_j$. La formule (3.89) reste en effet valable, à condition de rajouter partout l'indice j.

<u>Notion de disque</u> : Supposons maintenant que $\boldsymbol{G_1}$ soit un opérateur linéaire, stationnaire de dimension finie, ayant une matrice de transfert G_1 telle que $G_1(i\omega)$ est définie presque partout sur $\Re$, et reconsidérons l'équivalence (3.87), avec $G = r\, G_1\, (I + c\ \ G_1)^{-1}$. On obtient : $\|r\, G_1\, (I + c\ \ G_1)^{-1}\|_\infty \leq 1$ si et seulement si $r\, G_1\, (I + c\ \ G_1)^{-1}$ est L_2-*stable* et :

$$\underset{\omega}{ess.\sup}\,\{m(-[I + a\, G_1(i\omega)]^*\,[I + b\, G_1(i\omega)])\} \leq 0. \qquad (3.90)$$

Considérons par exemple le cas monovariable, avec $0 < a < b$. Alors (3.90) devient : $\Re_e\,([G_1(i\omega) + \frac{1}{a}\,]^*\,[G_1(i\omega) + \frac{1}{b}\,]) \geq 0$ pour presque tout ω. Ceci revient à dire que le lieu de Nyquist de G_1 ne pénètre pas à l'intérieur du disque de diamètre $[-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}]$ (voir figure 3.36).

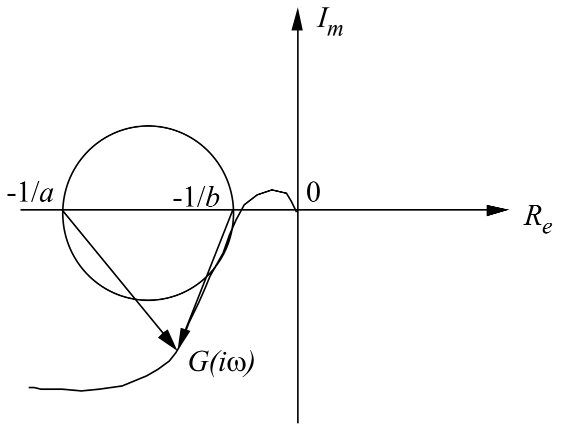


Figure 3.36 *- Extériorité au disque D(a,b).*

De façon générale, nous appellerons disque $D(a,b)$(4) l'ensemble des matrices G, à coefficients complexes (et de dimensions convenables) telles que

$$m(-[I + a\, G]^* \, [I + b\, G]) > 0 \qquad (3.91)$$

Dans le cas monovariable, avec $0 < a < b$, $D(a,b)$ est donc le disque ouvert de diamètre $[-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}]$. La condition (3.90) revient à dire que l'image par G_1 de $i\Re$ ne rencontre pas l'intérieur du disque D(a,b).

Dans le cas multivariable, considérons un système contrôlé ayant une marge de module $M_{mi} \leq 1$, avec i = e ou s, suivant que cette marge est en entrée ou en sortie, et posons $\delta = M_{mi}$. On a donc à chaque fréquence ω : $\bar{\sigma}([I + L_i]^{-1}) \leq \delta^{-1}$, soit encore $\underline{\sigma}(I + L_i) \geq \delta$; ceci équivaut à $\lambda_{\min}\{(L_i + I)^* \, (L_i + I) - \delta^2 I\} \geq 0$, ou encore à $m\{-[I + (1+\delta)^{-1} L_i]^* \, [I + (1-\delta)^{-1} L_i]\} \leq 0$. Par conséquent, l'image par L_i de $i\Re$ ne rencontre pas le disque $D((1+\delta)^{-1} I, (1-\delta)^{-1} I)$.

Par le même type de calcul, on montre facilement qu'un système contrôlé multivariable ayant une marge de module complémentaire Mmc_i (où i a la même signification que ci-dessus) est tel que l'image par L_i de $i\Re$ ne rencontre pas le disque $D((1-\delta)\, I, (1+\delta)\, I)$.

---

(4) Nous reprenons ici la dénomination de [Vid 93].

Compte tenu des équivalences qui ont été démontrées, on obtient à partir du Théorème 3.9 le théorème ci-dessous, applelé Critère du cercle multivariable :

Théorème 3.10 : "Supposons $\boldsymbol{G_1}$ linéaire, stationnaire et de dimension finie. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure 3.33 soit *L_2-stable* pour tout opérateur $\boldsymbol{G_2}$ appartenant au secteur $S(a, b)$ est :

i) $\boldsymbol{G_1}\,(I + c\ \ \boldsymbol{G_1})^{-1}$ est *L_2-stable*, avec $c = (a + b)/2$

ii) l'image par G_1 de $i\,\Re$ ne rencontre pas le disque $D(a,b)$."

Notons que $D(a,b)$ n'est pas toujours un disque au sens géométrique de ce terme. Considérons par exemple le cas monovariable, avec a=0 et b>0. Alors, $D(a,b)$ devient le demi-plan $\Re_e\,(G) < -\dfrac{1}{b}$. En faisant tendre b vers l'infini, cet ensemble devient le demi-plan gauche ouvert, et la condition (3.90) (lorsque G_1 a tous ses pôles dans le demi-plan gauche, à l'exception éventuelle de pôles simples sur l'axe imaginaire ayant des résidus à partie réelle positive) devient une condition de passivité [Des 75] ; de même, la condition (3.84) devient une condition de passivité stricte. Rappelons que, plus précisément, un système $\boldsymbol{G}$ est par définition **strictement passif** s'il existe ε > 0 et un réel β tels que

$$<x, \boldsymbol{G}\,x>_T \geq \varepsilon\,\|x\|_T^2 + \beta$$

pour tout x dans L_{2e} et tout réel T ; si cette proposition est satisfaite avec ε = 0, alors par définition $\boldsymbol{G}$ est **passif**. On a le résultat classique suivant, qui est étroitement lié à ce qui précède [Vid 93], [Des 75] : si $\boldsymbol{G_1}$ est passif et si $\boldsymbol{G_2}$ est *L_2-stable* et strictement passif, alors le système bouclé de la figure 3.33 est *L_2-stable*.

<u>Remarque</u> : Une version locale du Théorème des Petits Gains, du Critère du Cercle et du Théorème de Passivité a été obtenue très récemment [Bou 95b]. L'espace fonctionnel utilisé est alors un espace de Sobolev et non plus l'espace L_2 ("*W*-stabilité"). Voir aussi [Bou 94b] dans le cas des systèmes à temps discret.

Bibliographie

[Aïo 93] **Aïoun F.** - Commande robuste d'une structure flexible garantissant des performances optimales - Thèse de l'Université d'Orsay, Orsay, 12 mai 1993.

[And 89] **Anderson B.D.O., Moore J.B.** - Optimal Control - London, Prentice-Hall, 1989.

[Apk 92a] **Apkarian P., Chretien J. P.** - Robust Control of 2 d. o. f. flexible manipulator using H_∞ and μ synthesis methodologies - Proc. AIAA Guid., Nav. and Control Conf., Hilton Head, SC, 1992.

[Apk 92b] **Apkarian P., Gahinet P., Chretien J.P., Biannic J.M.** - H_∞ / μ extensions and variations - Journées Nationales sur la Robustesse, Toulouse, 1992.

[Ast 84] **Aström K.J., Wittenmark B.** - Computer Controlled Systems : Theory and Design - London, Prentice-Hall, 1984.

[Bou 91] **Bourlès H., Irving E.** - La méthode LQG/LTR : Une interprétation polynômiale temps continu / temps discret - RAIRO APII, vol. 25, p. 545-568 et 569-592, 1991.

[Bou 92] **Bourlès H., Irving E.** - Robustesse - Assemblée Générale du GR Automatique, Paris, 24 septembre 1992.

[Bou 94a] **Bourlès H.** - Semi-Cancellable Fractions in System Theory - IEEE Trans. on Autom. Contr., vol. AC-39, n°10, 1994.

[Bou 94b] **Bourlès H.** - A Local Small Gain Theorem for Discrete-Time Systems - Proc. 33rd IEEE CDC, Lake Buena Vista (Floride), December 14-16 1994.

[Bou 95a] **Bourlès H., Fliess M.** - Poles and Zeros of Linear Systems : an invariant approach - Congrés IFAC Systems Structure and Control, Nantes, 5-7 Juin 1995 (soumis pour publication).

[Bou 95b] **Bourlès H., Colledani F.** - W-Stability and Local Input-Output Stability Results - IEEE Trans. on Autom. Control, 1995 (à paraître).

[Che 82] **Chen M.J., Desoer C.A.** - Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems - Int. J. Contr., vol. 35, p. 255-267, 1982.

[Che 84] **Chen C.T.** - Linear System Theory and Design - Orlando, Florida, Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1984.

[Chev 93] **Chevrel P.** - Commande Robuste : Application à la régulation d'un groupe turboalternateur - Thèse de l'Université d'Orsay, Orsay, 24 juin 1993.

[Chi 92] **Chiang R.Y., Safonov M.G.** - Robust Control Toolbox - (version 2), South Natick, MA : The MathWorks, Inc, 1992.

[Cou 93] **Coustal P., Michelin J.M.** - Iterative synthesis of low order controller for flexible structure using H_∞ methods - Proc. 2d ECC, Groningen, The Netherlands, p. 727-732, 1993.

[Dah 88] **Dahleh M. A., Ohta Y.** - A necessary and sufficient condition for robust BIBO stability - Syst. Contr. Lett., vol. 11, p. 271-275, 1988.

[Des 75] **Desoer C.A., Vidyasagar M.** - Feedback Systems : Input-Output Properties - New-york : Academic Press, 1975.

[Doy 81] **Doyle J.C., Stein G.** - Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-26, p. 4-16, 1981.

[Doy 89] **Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.** - State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-34, p. 831-847, 1989.

[Doy 82] **Doyle J.C.** - Analysis of feedback systems with structured uncertainties - IEE Proc., vol. 129, Pt D, p. 242-250, 1982.

[Doy 85] **Doyle J.C.** - Structured Uncertainty in Control System Design - Proc. 24th CDC, Ft. Lauderdale (Florida), p. 260-265, 1985.

[Doy 84] **Doyle J.C.** - Lecture Notes in Advances in Multivariable Control - ONR/Honeywell Worshop, Minneapolis, MN, 1984.

[Doy 92] **Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R.** - Feedback Control Theory - New-York, MacMillan, 1992.

[Duc 99] **Duc G., Font S.** – Commande H_∞ et μ -analyse, Hermès, 1999.

[Fan 91] **Fan K.H., Tits A., Doyle J.C.** - Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-36, p. 25-38, 1991.

[Fra 84a] **Francis B.A., Zames G.** - On H_∞-Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-29, p. 9-16, 1984.

[Fra 84b] **Francis B.A., Helton J.W., Zames G.** - H_∞ -Optimal Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-29, p. 888-900, 1984.

[Fra 87a] **Francis B.A., Doyle J.C.** - Linear Control Theory with an H_∞ Optimality Criterion - SIAM J. Contr. and Opt., vol. 25, p. 815-844, 1987.

[Fra 87b] **Francis B.A.** - A Course in H_∞ Control Theory - Berlin, Springer Verlag, 1987.

[Fre 85] **Freudenberg J.S., Looze D.P.** - Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-30, p. 555-565, 1985.

[Fre 88] **Freudenberg J.S., Looze D.P.** - Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems - Berlin, Springer Verlag, 1988.

[Gar 81] **Garnett J.B.** - Bounded Analytic Functions - Orlando, Academic Press, 1981.

[Glo 88] **Glover K., Doyle J.C.** - State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity - Syst. Cont. Letters, vol. 11, p. 167-172, 1988.

[Har 30] **Hardy G.H., Littlewood J.E.** - A maximal theorem with function-theoretic applications - Acta Math., vol. 54, p. 81-116, 1930.

[Igl 91] **Iglesias P.A., Glover K.** - State-space approach to discrete-time H_∞ control - Int. J. Control, vol. 54, n° 5, p. 1031-1073, 1991.

[Ion 93] **Ionescu V., Weiss M.** - Two-Riccati formulae for the discrete-time H_∞-control problem - Int. J. Control, vol. 57, n° 1, p. 141-195, 1993.

[Kai 80] **Kailath T.** - Linear Systems - Englewood Cliffs N J, Prentice-Hall, 1980.

[Kho 72] **Khoan V.-K.** - Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles - tome 2, Paris, Vuibert, 1972.

[Kim 84] **Kimura H.** - Robust Stabilizability for a Class of Transfer Functions - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-29, p. 788-793, 1984.

[Kwa 93] **Kwakernaak H.** - Robust Control and H_∞-Optimization : Tutorial Paper - Automatica, vol. 29, p. 255-273, 1993.

[Mac 76] **MacFarlane A.G.J., Karkanias N.** - Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory - Int. J. Control, vol. 24, p. 33-74, 1976.

[Mac 89] **Maciejowski J.M.** - Multivariable Feedback Design - Wokingham, Addison Wesley, 1989.

[McF 90] **McFarlane D.C., Glover K.** - Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions - Berlin, Springer Verlag, 1990.

[Nev 19] **Nevanlinna R.** - Über beschränke Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschrieben Werte annehmen - Ann. Acad. Sci Fenn., Ser. A, vol. 13, n°1, 1919.

[Pac 93] **Packard A., Doyle J.C.** - The Complex Structured Singular Value - Automatica, vol. 29, p. 71-110, 1993.

[Pic 16] **Pick G.** - Über die Beschränkungen analitische Functionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden - Math. Ann., vol. 77, p. 7-23, 1916.

[Rud 66] **Rudin W.** - Real and Complex Analysis - New-York, McGraw-Hill, 1966

[Saf 77] **Safonov M.G., Athans M.** - Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-22, p. 173-179, 1977.

[Saf 81] **Safonov M.G., Athans M.** - A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-26, p. 415-422, 1981.

[Saf 82] **Safonov M.G.** - Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems - IEE Proc., vol. 129, Pt. D, p. 251-256, 1982.

[Saf 87] **Safonov M.G., Jonckheere E.A., Verma M., Limebeer D.J.N.** - Synthesis of positive real multivariable feedback systems - Int. J. Control, vol. 45, p. 817-842, 1987.

[Saf 93] **Safonov M.G., P.-H. Lee** - A Multiplier Method for Computing Real Multivariable Stability Margins - Proc. IFAC World Congress, Sydney, Australia, 1993.

[Sha 91] **Shamma J.S.** - The Necessity of the Small-Gain Theorem for Time-Varying and Nonlinear Systems - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-36, p. 1138-1147, 1991.

[Ste 91] **Stein G., Doyle J.C.** - Beyond Singular Values and Loop Shapes - J. Guidance, vol. 14, p. 5-16, 1991.

[Sid 90] **Sideris A., Sanchez Pena R.S.** - Robustness Margin Calculation with Dynamic and Real Parametric Uncertainty - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-35, p. 970-974, 1990.

[Sto 92a] **Stoorvogel A.A.** - The dicrete time H_∞ control problem with measurement feedback - SIAM J. Control and Optimization, vol. 30, n° 1, p. 182-202, 1992.

[Sto 92b] **Stoorvogel A.A.** - The H_∞ control problem : a state space approach - Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1992.

[Tsi 90] **Tsing N.-K.** - Convexity of the Largest Singular Value of $e^D M e^{-D}$: A Convexity Lemma - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-35, p. 748-749, 1990.

[Vid 85] **Vidyasagar M.** - Control System Synthesis : A Factorization Approach - Cambridge, MIT Press, 1985.

[Vid 93] **Vidyasagar M.** - Nonlinear Systems Analysis - (Second Edition), Englewood Cliffs N J, Prentice-Hall, 1993.

[Wil 71] **Willems J.C.** - The Analysis of Feedback Systems - Cambridge, MA, M.I.T. Press, 1971.

[You 91] **Young P.M., Newlin M.P., Doyle J.C.** - μ Analysis with Real Parametric Uncertainty - Proc. 30th CDC, Brighton (Angleterre), p. 1251-1256, 1991.

[Zam 66a] **Zames G.** - On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part I : Conditions using concepts of loop gain, conicity and positivity - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-11, p. 228-238,1966.

[Zam 66b] **Zames G.** - On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part II : Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-11, p. 465-476, 1966.

[Zam 81] **Zames G.** - Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-26, p. 301-320, 1981.

[Zam 83] **Zames G.** - Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness - IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-28, p. 585-601, 1983.