R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analysis and Control
(vol. 18, n° 3, 1984, p. 297 à 314)

STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES PERTURBÉS. ROBUSTESSE (*)

par H. BOURLÈS (1)

Présenté par P. BERNHARD

Résumé. — *On étudie dans cet article la stabilité de systèmes pouvant être considérés comme des systèmes linéaires invariants entachés d'une « perturbation structurelle » (erreur de modèle) et de « perturbations multiplicatives » dues à l'imperfection des organes de la chaîne de retour (actionneurs et capteurs). L'approche suivie généralise la « seconde méthode de Lyapunov ». Le théorème de stabilité obtenu est appliqué à l'étude de la robustesse des régulateurs « linéaires quadratiques ». Les résultats déjà connus sont alors étendus.*

Mots clés : Stabilité, Robustesse, Détectabilité forte.

Abstract. — *In this paper is studied the stability of systems which can be considered as linear time-invariant systems sullied by a « structural perturbation » (model error) and « multiplicative perturbations » coming from the imperfection of control and measurement components. The approach generalizes the « second method of Lyapunov ». The stability theorem is applied to the study of the robustness of « linear quadratic » regulators. The known results are then extended.*

Key words : Stability, Robustness, Strong detectability.

I. INTRODUCTION

On sait qu'un système linéaire (à plus forte raison invariant) est une idéalisation de la réalité. On obtient le plus souvent un tel système en négligeant un terme non linéaire, qui peut alors être considéré comme une perturbation (appelée perturbation structurelle). Une fois l'étude de la stabilité du système linéaire effectuée (ou une fois déterminée la commande à lui appliquer de manière à ce qu'il soit stable en boucle fermée), on peut étudier la stabilité du système perturbé, soit directement [1, Chap. XIII, § 2], soit par la seconde méthode de Lyapunov. Cette dernière méthode conduit à des résultats de robustesse particulièrement intéressants lorsque la commande du système linéaire a été obtenue par optimisation quadratique [2].

(*) Reçu en novembre 1983.
(1) Professeur à l'Ecole Supérieure d'Informatique, Electronique, Automatique (ESIEA), 9, rue Vésale, 75005 Paris.

R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analysis and Control, 0399-0524/84/03/297/18/$ 3.80
© AFCET Bordas-Dunod

Le terme de perturbation structurelle n'est toutefois pas le seul qu'on doive prendre en compte pour obtenir une représentation précise de la réalité. Les organes de la chaîne de commande (actionneurs) et ceux de la chaîne de mesure (capteurs), même si on les suppose linéaires, provoquent d'autres types de perturbations, appelées perturbations multiplicatives.

De façon plus précise, supposons que le système linéaire (non perturbé) ait pour équation

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{pour } t \geqslant 0) \qquad (1)$$
$$x(0) = x_0\,, \quad x(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0\,,$$

avec $\forall t$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ (*) ; A et B sont des applications linéaires respectivement de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$; le couple (A, B) est supposé stabilisable.

Si la loi de commande est linéaire, de la forme $u(t) = Kx(t)$ (K application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$), le système linéaire contrôlé a pour équation (pour $t \geqslant 0$) :

$$\dot{x}(t) = A_c\, x(t)\,, \qquad (2)$$

avec

$$A_c = A + BK\,. \qquad (3)$$

Le gain K est choisi de telle sorte que A_c ait toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.

On peut modéliser les organes de la chaîne de commande et ceux de la chaîne de mesure par des *opérateurs de convolution* non anticipatifs $u \to \mathscr{L}_c * u$ et $x \to \mathscr{L}_M * x$ ($\mathscr{L}_c$ et $\mathscr{L}_M$ étant, dans le cas le plus général, des matrices de distributions, une fois qu'applications linéaires et matrices, de même que vecteurs et matrices unicolonnes, ont été identifiés pour des bases fixées de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$).

Le système perturbé a alors pour équation, en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (\mathcal{C} * x)(t) + f(x(t), t) \quad (\text{pour } t \geqslant 0)\,, \qquad (4)$$

où f est la perturbation structurelle (terme non linéaire) et où

$$\mathcal{C} = A\delta + (B\mathscr{L}_c) * (K\mathscr{L}_M) \qquad (5)$$

(*) Il conviendrait en réalité de supposer que $x(t) \in \mathscr{X}$, $\mathscr{X}$ espace euclidien de dimension n. Mais, comme on le sait, on se ramène au cas où $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ en choisissant une base orthonormée de $\mathscr{X}$; d'autre part, on se ramène au cas où le produit scalaire envisagé est le *produit scalaire naturel* de $\mathbb{R}^n$, en utilisant un isomorphisme orthogonal. *On suppose donc ici que cette opération a déjà été effectuée.* D'un point de vue physique, les composantes de $x(t)$ sont donc des « quantités sans dimension ». Le même raisonnement vaut pour $u(t)$. *Ceci est très important pour que le problème soit « bien conditionné » et pour que les quantifications qui seront établies plus loin soient applicables en pratique.*

(δ étant l'impulsion de Dirac) (*).

La seconde méthode de Lyapunov a pu être appliquée à l'étude de la stabilité du système (4) dans le cas où les matrices de réponses impulsionnelles $\mathscr{L}_c$ et $\mathscr{L}_M$ ont des transformées de Fourier Λ_c et Λ_M constantes en fonction de la pulsation ω [3, 4]. Dans ce cas, en effet, si l'on complexifie x, le système (4) devient un système différentiel ordinaire dans $\mathbb{C}^n$ (*cf.* [4]). Cette approche a permis d'obtenir des résultats de robustesse intéressants, notamment lorsque la commande $u = Kx$ de (1) a été obtenue par optimisation quadratique. En particulier, les propriétés de marge de gain et marge de phase des régulateurs linéaires quadratiques multivariables, initialement mises en évidence dans [5-7], ont été généralisées (*cf.* [4, Théorème 3]).

L'approche suivie dans [3, 4] a toutefois de gros inconvénients. L'hypothèse selon laquelle Λ_c et Λ_M sont constantes par rapport à ω n'est en effet satisfaisante ni d'un point de vue pratique, ni d'un point de vue théorique. Ce défaut a été partiellement corrigé dans [8] (**), où des résultats semblables à ceux de [3, 4] ont été retrouvés sous des hypothèses beaucoup plus réalistes : les matrices de réponses impulsionnelles $\mathscr{L}_c$ et $\mathscr{L}_M$ sont supposées avoir pour éléments des combinaisons linéaires de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et de l'impulsion de Dirac. La plupart des organes linéaires stationnaires sans retard ont des réponses impulsionnelles de ce type (du moins quand ils sont stables).

Cependant, les hypothèses prises dans [8] ne sont pas pleinement satisfaisantes : d'un point de vue pratique, il est gênant de se limiter aux organes sans retard ; et d'un point de vue théorique, ces hypothèses n'apparaissent pas comme nécessaires.

Le présent article a pour objet de généraliser l'approche et les résultats de [3, 4 et 8].

La seconde méthode de Lyapunov ne peut évidemment pas s'appliquer au système (4), puisque celui-ci n'est pas un système différentiel ordinaire (tout au moins lorsqu'on sort du cadre très restrictif de [3, 4]). Une adaptation de cette méthode à l'étude de la stabilité d'un système tel que (4) est donc proposée dans la Section II. Un théorème de stabilité est établi. Puis, le cas plus particulier où $f = 0$ (perturbation structurelle nulle) est examiné. On obtient alors un résultat généralisant le Critère de Lyapunov [9, p. 277]. Afin de comparer

(*) Les règles de calcul employées ici sont les suivantes : $A\delta$ est la matrice de terme général $A_{ij}\,\delta$; $B\mathscr{L}_c$ (resp. $K\mathscr{L}_M$) est la matrice de terme général $S_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}(\mathscr{L}_c)_{kj}$ $\left(\text{resp. } T_{ij} = \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(\mathscr{L}_M)_{kj}\right)$; enfin, $(B\mathscr{L}_c) \times (K\mathscr{L}_M)$ est la matrice de terme général $U_{ij} = \sum_{k=1}^{m} S_{ik} * T_{kj}$ (A, B et K sont considérées ici comme des matrices et non plus comme des applications linéaires).

(**) Le travail mentionné ici a été réalisé à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA).

précisément ce résultat à ce Critère, il est effectué une étude de la détectabilité, ainsi que d'une détectabilité renforcée, appelée *détectabilité forte* (*), du point de vue entrée-sortie dans l'espace des fonctions de carré intégrable.

Dans la Section III, les résultats de la Section II sont appliqués à l'étude de la robustesse des régulateurs, en particulier des régulateurs linéaires quadratiques.

La Section IV est réservée à la Conclusion.

II. ÉTUDE DE STABILITÉ

Dans cette Section, on étudie la stabilité du système défini par l'équation (4). Les hypothèses considérées sont les suivantes :

(H_1) : $\mathcal{C}$ est une matrice de dimension $n \times n$, dont les éléments sont des combinaisons linéaires de mesures à support compact inclus dans $\mathbb{R}^+$ et de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ (au sens de la mesure de Lebesgue) (**) à support (non nécessairement compact) inclus dans $\mathbb{R}^+$. Autrement dit, on peut écrire :

$$\mathcal{C} = \mathcal{M} + \mathcal{F} \tag{6}$$

où $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{F}$) est une matrice $n \times n$ dont les éléments $\mathcal{M}_{ij}$ (resp. $\mathcal{F}_{ij}$) sont des mesures de Radon (resp. des fonctions) vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus (***).

(H_2) : f est continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^n$.

On se préoccupe uniquement, dans cet article, des questions de stabilité. Le problème d'existence et d'unicité de la solution du système (4) n'est donc pas abordé. C'est pourquoi on fait de plus l'hypothèse suivante :

(H_3) : La solution de (4) vérifiant la condition initiale x_0 existe, est unique, et est absolument continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 1 :

a) L'hypothèse (H_1) est très générale. Les supports des $\mathcal{M}_{ij}$ et des $\mathcal{F}_{ij}$ sont pris dans $\mathbb{R}^+$ pour que l'opérateur linéaire stationnaire dont $\mathcal{C}$ est la réponse impulsionnelle soit non anticipatif [10, p. 14]. Les organes à retard sont pris en compte dans cette modélisation, puisque les translatées de l'impulsion de Dirac sont bien des mesures à support compact.

b) La continuité absolue est la condition minimum imposable à x pour que cette fonction puisse être solution de (4) : il convient en effet que le Théorème de Lebesgue s'applique. D'autre part, si le problème de l'existence et de l'unicité de la solution est délicat d'un point de vue mathématique (notamment du fait qu'on ne peut se contenter d'un résultat local), il n'est guère restrictif, d'un point de vue physique, de supposer assurées cette existence et cette unicité.

1. Étude générale

D'après l'hypothèse (H_1), $\mathcal{C}$ admet une transformée de Fourier T qui est une *fonction* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^{n\times n}$. En effet, $\forall(i, j)$, $\mathcal{M}_{ij}$ et $\mathcal{F}_{ij}$ admettent pour transformées de Fourier des fonctions M_{ij} et F_{ij} ; et l'on a donc

$$T = M + F \tag{7}$$

où M (resp. F) est la matrice de terme général M_{ij} (resp. F_{ij}).

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1 : *Supposons que :*

a) *il existe deux matrices symétriques réelles définies positives P et D_0 telles que*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad T^*(\omega)\, P + PT(\omega) \leqslant -\, D_0 \quad (*) \quad \textit{et} \tag{8}$$

b) *il existe un instant $t_0 \geqslant 0$ tel que*

$$\sup_{\substack{t \geqslant t_0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\| f(\xi, t) \|}{\| \xi \|} < \frac{1}{2 \| P \| \| D_0^{-1} \|} \quad (**). \tag{9}$$

Alors, quel que soit x_0, $x(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$. Si de plus $t_0 = 0$ et $\forall t \geqslant 0$, $f(0, t) = 0$, alors le système (4) *est globalement Lyapunov-asymptotiquement stable relativement au point d'équilibre $\xi = 0$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous formulerons trois remarques :

Remarque 2 : Compte tenu du fait qu'une « mise à l'échelle » des composantes de x a été effectuée d'emblée (voir la première Note de la Section I), ce théorème généralise le Théorème III.6 de [8], où $\mathcal{M}$ est supposé de la forme $G\delta$ (δ étant l'impulsion de Dirac et $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

(*) Il s'agit, comme on le verra, d'une notion proche de l'*observabilité*, mais qui, dans le cas général, ne coïncide pas avec elle.

(**) Dans la suite, on dira en abrégé qu'une fonction h à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est intégrable (resp. de carré intégrable) si la fonction $| h | : x \to \| h(x) \|$ (ou $x \to | h(x) |$ si $n = 1$) est intégrable (resp. de carré intégrable) sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^+$ dans le cas où h n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$) au sens de la mesure de Lebesgue. On posera alors $\| h \|_{L^p} = \left[\int_{\mathcal{D}} (| h | (x))^p \, dx \right]^{1/p}$, avec $p = 1$ ou 2 et $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ suivant le cas.

(***) Les résultats de cet article sont encore valables dans le cas où les $\mathcal{C}_{ij}$ sont, plus généralement, des *mesures bornées* (L^1 étant considéré comme sous-espace de l'espace de Banach des mesures bornées).

(*) Cette relation $\leqslant$ est une relation d'ordre définie sur les matrices hermitiennes d'une dimension donnée par : $D_1 \leqslant D_2$ si $D_2 - D_1$ est semi-définie positive.

(**) Pour une matrice hermitienne semi-définie positive D, $\| D \|$ est ce qu'on appelle parfois la « norme spectrale » de D : il s'agit de la plus grande valeur propre de D.

Remarque 3 :

a) La stabilité asymptotique dont il est question ici est entendue dans le sens suivant :

i) $\xi = 0$ est un point d'équilibre pour le système (4) (à l'instant 0) ;

ii) ce point d'équilibre est stable (au sens de Lyapunov) ;

iii) quelle que soit la condition initiale $x_0 = x(0)$, $x(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

Certains auteurs n'exigent pas la seconde condition (stabilité au sens de Lyapunov) quand il est question de stabilité asymptotique *globale* (voir [11], pp. 136, 137). Quand les conditions i) et iii) sont vérifiées, nous dirons donc que le système (4) est globalement asymptotiquement stable *au sens large* relativement à l'origine.

b) Il est clair que le point $\xi = 0$ n'est un point d'équilibre pour le système (4) (à l'instant 0) que si $\forall t \geqslant 0, f(0, t) = 0$. Cette condition est donc nécessaire pour que la Lyapunov-stabilité asymptotique soit réalisée. Mais de toutes façons, l'inégalité (9) et la continuité de f (hypothèse (H_2)) entraînent que $\forall t \geqslant t_0, f(0, t) = 0$ (c'est-à-dire que $\xi = 0$ est un point d'équilibre à l'instant t_0).

Remarque 4 : Les théorèmes de stabilité dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sont nombreux. L'une des originalités du théorème ci-dessus est qu'il porte sur les deux domaines à la fois. Les deux conditions du théorème sont faciles à interpréter. Comme on le verra au Théorème 2, la condition *a*) peut être considérée comme une généralisation du Critère de Lyapunov. La condition *b*), semblable au résultat énoncé dans [2], impose à la perturbation structurelle de ne pas avoir une norme trop importante. Dans le cas où f est linéaire, de la forme $f(\xi, t) = L\xi$, L application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, la condition *b*) devient :

$$\| L \| < \frac{1}{2 \| P \| \| D_0^{-1} \|} . \tag{10}$$

Démonstration du Théorème 1.

a) Dans la première partie de cette démonstration, nous allons supposer que P est une matrice symétrique réelle *semi*-définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Soit V la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$V(t) = x^T(t)\, Px(t) . \tag{11}$$

Par hypothèse, x est absolument continue sur $\mathbb{R}^+$; d'après les propriétés des fonctions absolument continues, V est donc absolument continue sur $\mathbb{R}^+$,

et on peut donc appliquer le Théorème de Lebesgue, soit :

$$V(t) = x_0^T\, Px_0 + \int_0^t \dot{V}(\tau)\, d\tau \quad (\text{pour } t \geqslant 0) .$$

Or, on a :

$$\dot{V}(\tau) = 2\, x^T(\tau)\, P\dot{x}(\tau) = 2\, x^T(\tau)\, P[(\mathcal{C} * x)(\tau) + f(x(\tau), \tau)] .$$

Il vient donc :

$$V(t) = x_0^T\, Px_0 + 2 \int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau + 2 \int_0^t x^T(\tau)\, Pf(x(\tau), \tau)\, d\tau . \tag{12}$$

Nous allons à présent employer l'*opérateur de troncature linéaire* $\mathcal{P}_t$ [12] ; cet opérateur est défini de la manière suivante : si h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel E, $\mathcal{P}_t h$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans E telle que $(\mathcal{P}_t h)(\tau)$ égale $h(\tau)$ si $\tau \leqslant t$, et 0 si $\tau > t$.

Posons $x_t = \mathcal{P}_t x$. Le caractère non anticipatif de l'opérateur $x \to \mathcal{C} * x$ permet d'écrire :

$$\mathcal{P}_t[x^T\, P(\mathcal{C} * x)] = x_t^T\, P(\mathcal{C} * x_t) .$$

Or, il est clair que :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_t[x^T\, P(\mathcal{C} * x)](\tau)\, d\tau .$$

Il vient donc :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x_t)(\tau)\, d\tau . \tag{13}$$

D'après les hypothèses (H_1) et (H_2), les éléments de $\mathcal{F}$ et les composantes de x_t sont intégrables. Par conséquent, les composantes de $\mathcal{F} * x_t$ sont intégrables et cette quantité admet une transformée de Fourier égale à FX_t (X_t désignant la transformée de Fourier de x_t).

En outre, si par exemple on raisonne en termes de distributions, il est évident, compte tenu du fait que les éléments de $\mathcal{M}$ et les composantes de x_t sont à support compact, que $\mathcal{M} * x_t$ admet une transformée de Fourier égale à MX_t ; M étant une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times n}$), MX_t est également une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

D'après (7), $\mathcal{C} * x_t$ admet donc une transformée de Fourier égale à TX_t.

Nous allons montrer maintenant que $\mathcal{C} * x_t$ est de carré intégrable, de manière à pouvoir appliquer le Théorème de Plancherel-Parseval à l'équation (13).

Il est évident que x_t est de carré intégrable ; par conséquent, puisque les éléments de $\mathcal{F}$ sont intégrables, $\mathcal{F} * x_t$ est bien de carré intégrable.

D'autre part, les mesures $\mathcal{M}_{ij}$ sont à support compact, donc elles sont bornées ; il s'ensuit, puisque les $(x_t)_j$ sont de carré intégrable, que les produits de convolution $\mathcal{M}_{ij} * (x_t)_j$ sont également de carré intégrable.

Ceci prouve bien que $\mathcal{C} * x_t$ est de carré intégrable (*).

D'après (13), on a donc, en appliquant le Théorème de Plancherel-Parseval (et en développant les produits de matrices) :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} X_t^*(\omega) \left[T^*(\omega)\, P + P T(\omega)\right] X_t(\omega)\, d\omega .$$

Supposons maintenant l'inégalité (8) vérifiée, où D_0 est, pour l'instant, une matrice symétrique réelle *semi*-définie positive. Il vient donc :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau \leqslant (-1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} X_t^*(\omega)\, D_0\, X_t(\omega)\, d\omega .$$

En appliquant de nouveau le Théorème de Plancherel-Parseval (mais dans l'autre sens cette fois), on obtient :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau \leqslant (-1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} x_t^T(\tau)\, D_0\, x_t(\tau)\, d\tau , \quad \text{soit :}$$

$$\int_0^t x^T(\tau)\, P(\mathcal{C} * x)(\tau)\, d\tau \leqslant (-1/2) \int_0^t x^T(\tau)\, D_0\, x(\tau)\, d\tau .$$

En utilisant (12) et le fait que $\forall t \geqslant 0$, $V(t) \geqslant 0$, on obtient finalement :

$$I(t) \leqslant x_0^T\, P x_0 \leqslant \| x_0 \|^2 \, \| P \| \tag{14}$$

où $$I(t) = \int_0^t \left[x^T(\tau)\, D_0\, x(\tau) - 2\, x^T(\tau)\, Pf(x(\tau), \tau)\right] d\tau .$$

b) Supposons maintenant D_0 et P *définies* positives. On a alors

$$\forall \tau \in [0, t] , \quad x^T(\tau)\, D_0\, x(\tau) \geqslant (1/\| D_0^{-1} \|) \, \| x(\tau) \|^2$$

(*) La note suivante éclairera d'ailleurs ce point.

et (d'après l'inégalité de Schwarz)

$$| x^T(\tau)\, Pf(x(\tau), \tau) | \leqslant \| x(\tau) \| \, \| P \| \, \| f(x(\tau), \tau) \| .$$

Si l'on suppose qu'il existe un instant $t_0 \geqslant 0$ tel que l'inégalité (9) est vérifiée, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, quels que soient $t \geqslant t_0$ et $\xi \neq 0$:

$$\frac{\| f(\xi, t) \|}{\| \xi \|} \leqslant \frac{1}{2 \| P \| \, \| D_0^{-1} \|} - \varepsilon ;$$

on obtient donc, pour $t \geqslant t_0$, et en posant $\varepsilon' = 2 \| P \| \varepsilon$:

$$I(t) - I(t_0) \geqslant \varepsilon' \int_{t_0}^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau , \quad \text{soit, d'après (14)}$$

$$\int_{t_0}^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau \leqslant (1/\varepsilon') (\| x_0 \|^2 \, \| P \| - I(t_0)) . \tag{15}$$

Ceci entraîne bien entendu que x est de carré intégrable.

Montrons maintenant que $\dot{x}$ est également de carré intégrable, ce qui entraînera que $x(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini [13, exercice 1, p. 237].

D'après (4), il suffit de montrer que les fonctions $\mathcal{C} * x$ et g sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, où g est la fonction qui à $t \geqslant 0$ associe $f(x(t), t)$.

Puisque f est continue (hypothèse (H_2)) et que la restriction de x à $\mathbb{R}^+$ est absolument continue (hypothèse (H_3)), donc continue, g est continue, et donc de carré localement intégrable. En outre, on a $\forall t \geqslant t_0$:

$$\| g(t) \| \leqslant \mu_1 \| x(t) \| , \tag{16}$$

où $$\mu_1 = 1/(2 \| P \| \, \| D_0^{-1} \|) - \varepsilon . \tag{17}$$

Par conséquent, puisque x est de carré intégrable (sur $\mathbb{R}$), g est également de carré intégrable (sur $\mathbb{R}^+$).

D'autre part, pour tout couple (i, j), on a :

$$\| \mathcal{M}_{ij} * x_j \|_{L^2} \leqslant \| \mathcal{M}_{ij} \| \, \| x_j \|_{L^2} \tag{18}$$

où $\| \mathcal{M}_{ij} \|$ est la norme de $\mathcal{M}_{ij}$ dans l'espace des mesures de Radon bornées. On en déduit que $\mathcal{M} * x$ est de carré intégrable ; de plus :

$$\| \mathcal{M} * x \|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \mathcal{M}_{ij} * x_j \right\|_{L^2}^2$$

$$\leqslant n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| \mathcal{M}_{ij} * x_j \|_{L^2}^2$$

(d'après l'inégalité de Schwarz), d'où, en utilisant (18) :

$$\| \mathscr{M} * x \|_{L^2} \leqslant \mu_2 \| x \|_{L^2} \tag{19}$$

avec $$\mu_2 = n \left(\operatorname*{Max}_{i,j} \| \mathscr{M}_{ij} \| \right)^{1/2} .$$

Enfin, on a également, pour tout couple (i, j) :

$$\| \mathscr{F}_{ij} * x_j \|_{L^2} \leqslant \| \mathscr{F}_{ij} \|_{L^1} \| x_j \|_{L^2} ;$$

de la même manière que ci-dessus, on en déduit que $\mathscr{F} * x$ est de carré intégrable et que

$$\| \mathscr{F} * x \|_{L^2} \leqslant \mu_3 \| x \|_{L^2}$$

avec

$$\mu_3 = n \left(\operatorname*{Max}_{i,j} \| \mathscr{F}_{ij} \|_{L^1} \right)^{1/2} \quad (*) . \tag{20}$$

Par conséquent, la première partie du théorème est démontrée, à savoir que $x(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini (pour x_0 quelconque).

c) Il reste à montrer maintenant que, si de plus $t_0 = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(0, t) = 0$, alors le système est stable au sens de Lyapunov relativement au point d'équilibre $\xi = 0$: compte tenu de ce qui précède, dans ce cas il sera bien Lyapunov-asymptotiquement stable relativement à ce point d'équilibre.

Moyennant ces nouvelles hypothèses, on a, d'après (16)

$$\| g \|_{L^2} \leqslant \mu_1 \| x \|_{L^2} ;$$

cette inégalité, jointe à (19) et (20), conduit (d'après l'inégalité de Minkowski) à

$$\| \dot{x} \|_{L^2} \leqslant \mu \| x \|_{L^2} \tag{21}$$

avec $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$.

On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, \dot{x}(\tau)\, d\tau \leqslant \| \dot{x} \|_{L^2} \| x \|_{L^2} . \tag{22}$$

(*) On a monré que $\| \mathcal{C} * x \|_{L^2} \leqslant (\mu_2 + \mu_3) \| x \|_{L^2}$, et donc que l'opérateur de convolution $x \to \mathcal{C} * x$ est continu (ou « à gain fini ») sur l'espace des fonctions de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

D'après (21) et (22), on obtient donc

$$\forall t \geqslant 0 , \quad \| x(t) \|^2 \leqslant 2 \mu \| x \|_{L^2}^2 + \| x_0 \|^2 . \tag{23}$$

Mais d'après (15), puisque $t_0 = 0$, on a

$$\| x \|_{L^2}^2 \leqslant (1/\varepsilon') \| P \| \| x_0 \|^2 ,$$

d'où finalement

$$\| x(t) \| \leqslant [(\mu/\varepsilon) + 1]^{1/2} \| x_0 \| .$$

Il s'ensuit que le système (4) est stable au sens de Lyapunov relativement à l'état d'équilibre $\xi = 0$, et le théorème est donc démontré.

2. Cas d'une perturbation structurelle nulle

On examine dans ce paragraphe le cas où $f = 0$. L'équation (4) se simplifie donc, et on obtient, pour $t \geqslant 0$:

$$\dot{x}(t) = (\mathcal{C} * x)(t) , \quad x(0) = x_0 . \tag{24}$$

On va pouvoir obtenir dans ce cas une condition suffisante de stabilité moins restrictive que la condition *a*) du Théorème 1.

a) Avant d'énoncer cette condition, il convient de formuler deux définitions (la deuxième étant nouvelle) ; on comparera ensuite les notions précisées ci-dessous avec les notions classiques.

DÉFINITION 1 [6] : *Appelons* (Σ) *le système défini par l'équation* (24). *Soit* $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (*p étant un entier quelconque*) *et* $y : t \to Cx(t)$. *On dira que le couple* $(C, (\Sigma))$ *est* détectable *si l'on a l'implication suivante* : « *si y est de carré intégrable sur* $\mathbb{R}^+$, *alors x est de carré intégrable sur* $\mathbb{R}^+$ ».

DÉFINITION 2 : *Avec les notations de la Définition* 1, *on dira que le couple* $(C, (\Sigma))$ *est* fortement détectable *si*

i) $(C, (\Sigma))$ *est détectable*
et ii) $\forall \nu > 0, \exists \eta > 0 \mid \| y \|_{L^2} \leqslant \eta \Rightarrow \| x \|_{L^2} \leqslant \nu$.

b) Comparons ces notions avec les notions classiques de détectabilité et d'observabilité relatives aux systèmes différentiels linéaires invariants [9]. Pour cela, supposons que $\mathcal{C} = A\delta$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; le système (Σ) a donc pour équation, d'après (24) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) , \quad x(0) = x_0 .$$

On a dans ce cas les propositions suivantes, démontrées en Annexe :

PROPOSITION 1 : « *Le couple* $(C, (\Sigma))$ *est détectable si, et seulement si le couple* (C, A) *est détectable.* »

PROPOSITION 2 : « *Le couple* $(C, (\Sigma))$ *est fortement détectable si, et seulement si le couple* (C, A) *est observable.* »

c) On peut maintenant énoncer le théorème suivant qui, comme on le verra, est à rapprocher du Critère de Lyapunov :

THÉORÈME 2 : i) *Supposons qu'il existe deux matrices symétriques réelles semi-définies positives* P *et* D_0 *telles que, d'une part,* (8) *soit vérifiée, et d'autre part le couple* $(D_0^{1/2}, (\Sigma))$ *soit détectable (où* $D_0^{1/2}$ *est la racine carrée symétrique réelle de* D_0 *et où* (Σ) *est le système défini par* (24)). *Alors, le système* (Σ) *est globalement asymptotiquement stable* au sens large *relativement à l'origine.*

ii) *Si de plus* $(D_0^{1/2}, (\Sigma))$ *est fortement détectable, alors le système* (Σ) *est globalement Lyapunov-asymptotiquement stable relativement à l'origine.*

Avant de démontrer ce théorème, nous formulerons deux remarques :

Remarque 5 : Reprenons le cas où $\mathcal{C} = A\delta$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dans ce cas, la condition (8) s'écrit :

$$A^T P + PA \leqslant - D_0 .$$

On retrouve donc une condition semblable au Critère de Lyapunov [9, p. 277].

Remarque 6 : D'un point de vue physique, il est évident que les divers éléments de la boucle de régulation ont une bande passante bornée. Par conséquent, l'inégalité (8) ne sera en fait à vérifier que pour ω appartenant à un intervalle borné $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. (La même remarque vaut bien entendu pour le Théorème 1.)

Démonstration du Théorème 2 : Supposons vérifiées les hypothèses correspondant à la partie i) du Théorème 2. Alors, l'inégalité (14) est encore valable, mais puisque $f = 0$, on a :

$$\int_0^t x^T(\tau)\, D_0\, x(\tau)\, d\tau \leqslant \| P \| \, \| x_0 \|^2 . \tag{25}$$

Par conséquent, si l'on pose $y = D_0^{1/2} x$, y est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. D'après la Définition 1, x est donc de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Mais on a vu au *b*) de la démonstration du Théorème 1 que ceci entraîne que $\dot{x}$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec de plus

$$\| \dot{x} \|_{L^2} \leqslant (\mu_2 + \mu_3) \| x \|_{L^2} . \tag{26}$$

Ceci entraîne que $x(t)$ tend vers zéro (voir plus haut) et la première partie du théorème est donc démontrée.

Supposons maintenant que $(D_0^{1/2}, (\Sigma))$ soit fortement détectable.

D'après (22) et (26), l'inégalité (23) est encore valable, mais avec cette fois $\mu = \mu_2 + \mu_3$. Soit ν un réel strictement positif quelconque. D'après la Définition 2, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, si $\| y \|_{L^2} \leqslant \eta$, alors $\| x \|_{L^2} \leqslant \nu/(2\,\mu^{1/2})$; mais d'après (25), pour $\| x_0 \| \leqslant (\eta/\| P \|)^{1/2}$, on a $\| y \|_{L^2} \leqslant \eta$ (*). Donc, d'après (23), si $\| x_0 \| \leqslant \text{Min}\,((\eta/\| P \|)^{1/2}, \nu/\sqrt{2})$, on obtient $\forall t \geqslant 0$, $\| x(t) \| \leqslant \nu$.

Le système est donc stable au sens de Lyapunov relativement à l'origine, et le théorème est ainsi complètement démontré.

III. ÉTUDE DE ROBUSTESSE

L'étude de robustesse consiste à déterminer une condition suffisante portant sur $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{L}_M$ et f pour que le système (4), où $\mathcal{C}$ est défini selon (5), soit asymptotiquement stable.

Nous ferons sur $\mathcal{L}_c$ et $\mathcal{L}_M$ l'hypothèse suivante :

(H_4) : $\mathcal{L}_c$ (resp. $\mathcal{L}_M$) est une matrice de dimension $m \times m$ (resp. $n \times n$) dont les éléments sont des combinaisons linéaires de mesures à support compact inclus dans $\mathbb{R}^+$ et de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ à support (non nécessairement compact) inclus dans $\mathbb{R}^+$.

On montre alors immédiatement que $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (H_1). D'autre part, les hypothèses (H_2) et (H_3) sont supposées vérifiées. Les résultats de la Section II sont donc applicables.

Soit Λ_c (resp. Λ_M) la transformée de Fourier de $\mathcal{L}_c$ (resp. $\mathcal{L}_M$). On a alors $\forall \omega$, $T(\omega) = A + B\,\Lambda_c(\omega)\, K\, \Lambda_M(\omega)$. Posons

$$D(\omega) = - \left(T^*(\omega)\, P + PT(\omega)\right), \tag{27}$$

où P est la matrice symétrique réelle définie positive dont il est question au Théorème 1. La condition *a*) du Théorème 1 s'écrit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad D(\omega) \geqslant D_0 > 0 . \tag{28}$$

Cette condition, ajoutée à la condition *b*) du Théorème 1, fournit une généralisation du Théorème 1 de [4] au cas où Λ_c et Λ_M sont des fonctions non nécessairement constantes de ω.

(*) On n'examine ici que le cas où $\| P \| \neq 0$ et $\mu \neq 0$; l'autre cas est trivial.

En reprenant la méthode utilisée dans [4], on peut donc maintenant étendre tous les résultats de robustesse de [4] au cas plus général examiné ici. A titre d'exemple, étudions la manière dont le Théorème 3 de [4] se généralise :

Supposons que $f = 0$ (perturbation structurelle nulle), que $\mathscr{L}_M = I\delta$ (chaîne de mesure parfaite) et que $\forall\omega$, $\Lambda_c(\omega)$ soit une matrice normale. Supposons de plus que le gain K (voir éq. (3)) soit de la forme

$$K = -r^{-1} B^T P, \quad r \in \mathbb{R}^{+*}, \tag{29}$$

où P est l'unique solution définie positive de l'équation de Riccati

$$A^T P + PA - \alpha PBB^T P + Q = 0, \tag{30}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, Q matrice symétrique réelle définie positive.

On sait qu'on peut factoriser $\Lambda_c(\omega)$ selon

$$\Lambda_c(\omega) = G(\omega) \exp(i\Phi(\omega)),$$

où $G(\omega) = (\Lambda_c(\omega)\,\Lambda_c^*(\omega))^{1/2}$ est le *gain multivariable* de $\Lambda_c(\omega)$; $\Phi(\omega)$ est une matrice hermitienne dont les valeurs propres sont comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. Cette matrice est appelée le *déphasage multivariable* de $\Lambda_c(\omega)$ [4].

On obtient alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (Marge de gain, marge de phase d'un « régulateur linéaire quadratique généralisé » : *Sous les conditions ci-dessus, une condition suffisante pour que le système* (4) *soit globalement Lyapunov-asymptotiquement stable relativement à l'origine est qu'il existe un réel* $\gamma > 0$ *tel que*

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad G(\omega)\cos\Phi(\omega) \geqslant (1/2)\,[\alpha r I - (rKQ^{-1}K^T)^{-1}] + \gamma I. \tag{31}$$

En particulier, il suffit que

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad G(\omega)\cos\Phi(\omega) \geqslant (\alpha r/2)\, I.$$

Remarque 7

a) Si l'on suppose les directions propres de $\Lambda_c(\omega)$ constantes (par rapport à ω) et connues, on peut choisir une matrice R symétrique réelle définie positive ayant les mêmes directions propres que $\Lambda_c(\omega)$. Prenons alors $K = -R^{-1}B^T P$, où P est l'unique solution définie positive de l'équation

$$A^T P + PA - \beta PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad \beta \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Dans ce cas, la condition (31) est à remplacer par :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad G(\omega)\cos\Phi(\omega) \geqslant (1/2)\,[\beta I - (R^{1/2}KQ^{-1}K^T R^{1/2})^{-1}] + \gamma I. \tag{32}$$

Bien entendu, γ peut être aussi petit que l'on veut; si Λ_c est une fonction constante de ω, la condition (32) devient donc exactement la condition du Théorème 3 de [4], où le cas $\beta = 1$ (régulateur « linéaire quadratique ») est plus spécialement examiné.

b) Le théorème ci-dessus généralise en outre (d'après [4]) le Théorème 1 de [7] (où est étudiée la *marge de gain* des régulateurs linéaires quadratiques) ainsi que le Corollaire 5 de [6] (qui concerne la *marge de phase* de ces mêmes régulateurs). Pour $\alpha = r^{-1}$, on retrouve que, pour améliorer la robustesse d'un régulateur linéaire quadratique, il convient de minimiser la plus grande valeur propre de la matrice $rKQ^{-1}K^T$. Ceci a été mis en pratique dans [8], où plus de détails sont donnés sur cette question.

Démonstration du Théorème 3 : Pour que le système (4) soit globalement Lyapunov-asymptotiquement stable, il suffit que la condition (28) soit vérifiée, où D est la fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^{n\times n}$ définie selon (27) et où D_0 est une matrice symétrique réelle définie positive. En utilisant (27), (29) et (30), on obtient :

$$D(\omega) = K^T[rH(\omega) - (rKQ^{-1}K^T)^{-1}]\,K + Q, \tag{33}$$

où H est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^{m\times m}$ définie par :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \Lambda_c(\omega) + \Lambda_c^*(\omega) - \alpha r I + (rKQ^{-1}K^T)^{-1} \\ &= 2\,G(\omega)\cos\Phi(\omega) - \alpha r I + (rKQ^{-1}K^T)^{-1}. \end{aligned}$$

La condition (31) équivaut donc à :

$$\forall\omega, \quad H(\omega) \geqslant 2\gamma I.$$

Si cette condition est vérifiée, il existe un réel λ_Δ indépendant de ω vérifiant $0 < \lambda_\Delta < 1$ et

$$H(\omega) - \lambda_\Delta (rKQ^{-1}K^T)^{-1} \geqslant 0.$$

Il vient alors, d'après (33), pour tout ω :

$$D(\omega) \geqslant \lambda_\Delta Q + (1-\lambda_\Delta)\,[Q - K^T(KQ^{-1}K^T)^{-1}K].$$

Mais, d'après le Lemme 1 de [4], on a :

$$Q \geqslant K^T(KQ^{-1}K^T)^{-1}K.$$

La condition (28) est donc vérifiée avec $D_0 = \lambda_\Delta Q$.

IV. CONCLUSION

Dans cet article a été établi un théorème de stabilité pour un système vérifiant l'équation intégro-différentielle (4). Un tel système peut être considéré comme un système linéaire entaché d'une « perturbation structurelle » et de « perturbations multiplicatives » dynamiques. L'une des originalités de ce théorème est que, simultanément, il donne une condition sur la perturbation structurelle dans le domaine temporel et une condition sur les perturbations multiplicatives dans le domaine fréquentiel.

Dans le cas où la perturbation structurelle est nulle, on obtient une condition qu'on peut interpréter comme une généralisation du Critère de Lyapunov, grâce aux notions de détectabilité et « détectabilité forte » étudiées ici.

Ce théorème de stabilité est particulièrement bien adapté à l'étude de la robustesse des régulateurs, notamment des régulateurs linéaires quadratiques. Ainsi, les propriétés classiques de marge de gain et de marge de phase de ces régulateurs ont pu être généralisées.

Cet article, à caractère essentiellement théorique, devrait être prochainement suivi d'un article plus appliqué, où l'intérêt pratique des résultats qui viennent d'être énoncés sera mis en évidence.

ANNEXE

1. *Démonstration de la Proposition* 1

Dans ce qui suit, $\mathcal{N}$ désigne le sous-espace non observable de (C, A), et $\mathcal{X}^-(A)$ (resp. $\mathcal{X}^+(A)$) le sous-espace stable (resp. instable) de A [9]; d'autre part, $\mathcal{L}_n^2$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Si (C, A) n'est pas détectable, il existe $x_0 \in \mathcal{N}$ tel que $x_0 \notin \mathcal{X}^-(A)$. Pour cette condition initiale x_0, il est immédiat que $x \notin \mathcal{L}_n^2$ alors que $y = 0 \in \mathcal{L}_p^2$.

Si $x \notin \mathcal{L}_n^2$, alors $x_0 \notin \mathcal{X}^-(A)$. Le composant x_0' de x_0 dans $\mathcal{X}^+(A)$ est donc non nul. Soit C' (resp. A') la restriction de C (resp. A) à $\mathcal{X}^+(A)$ (A' étant considéré comme endomorphisme de $\mathcal{X}^+(A)$) : si (C, A) est détectable, (C', A') est observable; comme toutes les valeurs propres de A' sont à partie réelle positive ou nulle, il résulte que $y' : t \to C' e^{A't} x_0'$ n'est pas de carré intégrable. Donc, $y \notin \mathcal{L}_p^2$.

2. *Démonstration de la Proposition* 2 (*)

Supposons (C, A) observable et y de carré intégrable. D'après la Proposition 1, $x_0 \in \mathcal{X}^-(A)$, donc $x \in \mathcal{L}_n^2$. On peut alors écrire le système sous la forme

$$x = Ux_0, \quad y = Wx_0,$$

où U (resp. W) est une application linéaire continue de $\mathcal{X}^-(A)$ dans $\mathcal{L}_n^2$ (resp. $\mathcal{L}_p^2$). Comme (C, A) est observable, W est injectif, donc $W^* W$ est coercif ($W^* W$ opère sur un espace de dimension finie); il existe donc $k > 0$ tel que

$$\| y \|_{L^2}^2 = x_0^T W^* W x_0 \geqslant k \| x_0 \|^2 \geqslant (k/\| U \|^2) \| x \|_{L^2}^2 .$$

La réciproque est évidente.

RÉFÉRENCES

[1] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal,* Hermann, Paris, 1980.

[2] R. V. PATEL, M. TODA, B. SRIDHAR, *Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty,* IEEE Trans., vol. AC-22, nº 6, décembre 1977, 945-949.

[3] H. BOURLÈS, *Sur la robustesse des régulateurs linéaires multivariables, optimaux pour une fonctionnelle de coût quadratique,* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, nº 22 (22 juin 1981), série I, 971-974.

[4] H. BOURLÈS, O. L. MERCIER, *Marges de stabilité et robustesse structurelle généralisées des régulateurs linéaires quadratiques multivariables,* RAIRO Automatique, vol. 16, nº 1, 1982, 49-70.

[5] P.-K. WONG, M. ATHANS, *Closed-Loop Structural Stability for Linear-Quadratic Optimal Systems,* IEEE Trans., vol. AC-22, nº 1, février 1977, 94-99.

[6] M. G. SAFONOV, M. ATHANS, *Gain and Phase Margin for Multiloop L. Q. G. Regulators,* IEEE Trans., vol. AC-22, nº 2, avril 1977, 173-179.

[7] P.-K. WONG, G. STEIN, M. ATHANS, *Structural Reliability and Robustness Properties of Optimal Linear-Quadratic Multivariable Regulators,* Proc. 7e IFAC Congress, Helsinki, 1978, 1197-1805.

[8] H. BOURLÈS, *Qualification et amélioration de la robustesse des régulateurs multivariables, avec application au pilotage d'un avion,* Thèse de Docteur Ingénieur, I.N.P.G., octobre 1982; N. T. ONERA, nº 1983-2.

[9] W. M. WONHAM, *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach,* Springer Verlag, New York, 1979.

(*) Je remercie M. Bernhard de m'avoir indiqué une simplification dans ma démonstration originelle.

[10] A. FEINTUCH, R. SAEKS, *System Theory : a Hilbert Space Approach,* Academic Press, New York, 1982.

[11] M. VIDYASAGAR, *Nonlinear Systems Analysis,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.

[12] M. G. SAFONOV, *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems,* M.I.T. Press, Cambridge, 1980.

[13] C. A. DESOER, M. VIDYASAGAR, *Feedback Systems : Input-output properties,* Academic Press, New York, 1975.

Ouvrages généraux utilisés :

A. KOLMOGOROV, S. FOMINE, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle,* Ed. Mir, Moscou, 1977.

V. ALEXÉEV, V. TIKHOMIROV, S. FOMINE, *Commande optimale,* Ed. Mir, Moscou, 1982.

VO-KHAC KHOAN, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles,* tomes 1 et 2, Vuibert, Paris, 1972.

J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'Analyse,* tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématique : Intégration,* Chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1965.

F. R. GANTMACHER, *Théorie des matrices,* tome 1, Dunod, Paris, 1966.