

La méthode LQG/LTR : une interprétation polynomiale temps continu/temps discret

Première partie (*)

H. BOURLÈS (1) et E. IRVING (1)

Résumé/Abstract

On développe dans cet article une interprétation polynomiale de la méthode LQG/LTR. Cette approche permet de mieux faire comprendre le fondement de la méthode. En particulier, le rôle essentiel joué par les zéros du système à régler, est clairement mis en évidence. En effet, la méthode LTR consiste à simplifier ces zéros par la dynamique de l'observateur. Ceci est valable aussi bien avec un observateur d'état complet qu'avec un observateur réduit de Luenberger. La robustesse du système contrôlé est caractérisée par sa « marge de retard ». Le formalisme employé permet de traiter conjointement le temps continu et le temps discret (où l'opérateur delta est utilisé), et ainsi de faire ressortir les particularités du discret. Le cas des systèmes à non minimum de phase est envisagé. Enfin, le problème de la poursuite robuste avec rejet de perturbation est traité, avec comme application une méthode générale de détermination du PID. Cette première partie de l'article est consacrée à l'introduction, aux représentations et aux notations, puis à la théorie de la commande par retour polynomial d'état partiel, et enfin à la théorie de la commande avec observateur. Elle est donc essentiellement constituée de rappels, malgré une présentation peut-être inhabituelle.

This paper develops a polynomial interpretation of the LQG/LTR method. This approach allows a better understanding of the principles of the method. In particular, the prominent part played by the zeros of the plant is made obvious. Indeed, the LQG/LTR method consists in cancelling these zeros by the observer dynamics. This observer may be full state or reduced (i.e. a Luenberger observer). The robustness of the controlled system is characterized by its « delay margin ». The formalism allows to treat both the continuous and the discrete time (where the delta operator is used), and therefore to make clear the particularities of the discrete time approach. The case of non minimum phase plants is considered. Finally, the

(*) Reçu en mars 1990.

(1) Direction des Études et Recherches EDF, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, France.

problem of robust tracking with disturbance rejection is treated, with a general PID design method as an application. The first part of the paper is devoted to the introduction, to the representations and notations, then to the theory of partial state polynomial feedback, and finally to the theory of observer-based control. Therefore, this part essentially contains results already known, in spite of a somewhat unusual presentation.

Mots clés/Keywords

Robustesse; Observateur; LQG/LTR; Delta; Polynomial; Marge de retard; PID.

Robustness; Observer; LQG/LTR; Delta; Polynomial; Delay margin; PID.

1. Introduction

De très nombreux travaux ont porté, depuis près de vingt ans, sur l'étude de la robustesse des commandes linéaires quadratiques (LQ), puis linéaires quadratiques gaussiennes (LQG). Dès 1971, Anderson et Moore ont montré que les commandes LQ monovariées à temps continu possédaient des propriétés de robustesse très appréciables : une marge de gain contenant l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \infty \right]$, une marge de phase d'au moins 60°, une marge de gain-phase égale à 1 (*). Ces propriétés ont été étendues au cas multivarié quelques années plus tard (Safonov et Athans, 1977), (Bourlès, 1986a). Enfin, le cas des commandes LQ à temps discret a été envisagé (Safonov, 1980), (Bourlès *et al.*, 1990), et il a été montré qu'on retrouvait les propriétés de robustesse des commandes LQ à temps continu pour une période d'échantillonnage devenant infiniment petite.

La théorie de la commande LQ suppose qu'on ait accès à toutes les variables d'état pour le calcul de la commande. Or, on ne mesure généralement qu'une sortie du système, qui est une combinaison linéaire des variables d'état. L'état doit alors être reconstruit. La question s'est posée de savoir si les propriétés de robustesse de la commande LQ se conservaieut dans le cas où un reconstruc-teur d'état serait utilisé. Doyle et Stein (1979, 1981) ont montré qu'un observateur mal conçu (et en particulier un observateur optimal de Kalman dans le cas d'un environnement stochastique défavorable) pouvait conduire à une loi de commande ayant des marges de stabilité extrêmement faibles. Ils ont alors développé une méthode, connue en anglais sous l'abréviation LTR (« Full State

(*) La marge de gain-phase est définie comme étant la distance du lieu de Nyquist de la boucle ouverte au point -1 .

Feedback Loop Transfer Recovery») permettant de retrouver les propriétés de robustesse du retour d'état complet dans le cas d'un système à temps continu et à minimum de phase. En français, nous traduirons LTR par RTB (« Restitution du Transfert de Boucle »). Cette méthode consiste à utiliser un observateur qui serait optimal pour un certain système fictif. Ce système fictif est constitué du système à régler à la commande auquel s'ajouterait un bruit blanc supplémentaire. On montre alors que lorsqu'on fait croître indéfiniment la variance de ce bruit blanc, la fonction de transfert de la boucle ouverte avec observateur converge simplement (sous les hypothèses indiquées plus haut) vers la fonction de transfert de la boucle ouverte avec retour d'état complet. Or, c'est bien la fonction de transfert de la boucle ouverte qui détermine les propriétés de robustesse de la commande.

Les articles de Doyle et Stein laissaient penser que la RTB était avant tout fondée sur une propriété asymptotique du filtre optimal de Kalman. Or, il a été montré plus récemment (Sogaard-Andersen, 1987) qu'on obtenait une convergence du même type avec un observateur minimal de Luenberger. Un autre auteur (Tsui, 1987, 1988) a proposé d'utiliser des observateurs généraux (suivant la théorie générale des observateurs de Luenberger) pour réaliser la RTB. Une telle approche, selon cet auteur, éviterait d'ajouter un bruit supplémentaire à la commande, qui serait donc moins bruitée que lorsqu'on emploie le procédé de Doyle et Stein (en effet, comme on le verra plus loin, la RTB conduit à des commandes qui peuvent être très bruitées; mais l'argument de Tsui est spécieux car on n'ajoute pas réellement un bruit à la commande).

La situation est donc devenue quelque peu confuse, et on se propose dans cet article de mieux faire comprendre sur quel principe se fonde la RTB, et quelle est la structure obtenue asymptotiquement pour la loi de commande. Pour cela, on a adopté l'approche polynomiale (Kucera, 1979), plutôt que l'approche fondée sur la représentation d'état qui était utilisée habituellement. On s'est restreint au cas monovarié (réservant le cas multivarié pour une extension ultérieure), ce qui simplifie beaucoup l'exposé. On a par ailleurs utilisé un formalisme synthétique temps continu-temps discret, ce qui permet, bien sûr d'unifier la théorie, mais aussi de mieux mettre en évidence les spécificités de ce dernier cas. On sera souvent amené à considérer le cas discret avec de faibles périodes d'échantillonnage, et on sait bien que la représentation en q (ou en z) devient alors très mal conditionnée; c'est pourquoi on s'est attaché à intégrer dans le formalisme la représentation en δ (Middleton et Goodwin, 1986).

La Section 2 est consacrée aux questions de représentation et de formalisme.

On traite dans la Section 3 de la « commande par retour d'état partiel », et en particulier de la commande LQ, dont les propriétés de robustesse

sont redémontrées de façon synthétique. On montre à ce propos que la notion de **marge de phase** est bien trompeuse, et devrait être remplacée, ou du moins complétée, par celle de « marge de retard », dont une définition est proposée.

La théorie de la commande avec observateur, vue sous l'angle de l'approche polynomiale, est rappelée dans la Section 4. La théorie de la commande LQG est généralisée de façon à obtenir un système contrôlé ayant un **degré de stabilité** garanti. Cette section termine la première partie de l'article.

La seconde partie commencera à la Section 5, consacrée à la RTB : on donne tout d'abord la condition nécessaire et suffisante de RTB. On montre que cette condition ne peut, en général, être obtenue qu'asymptotiquement, pour un système à temps continu et à minimum de phase. Le cas des systèmes à temps discret et des systèmes à non minimum de phase est ensuite examiné. La théorie est à chaque fois illustrée par un exemple.

Le problème de la poursuite robuste avec rejet de perturbation sera traité dans la Section 6. La Section 7, enfin, est réservée à la conclusion.

2. Représentations et notations

Dans tout ce qui suit, p désigne un opérateur, dont la définition varie suivant le cas envisagé : p peut être égal à s , q ou δ .

2.1. TEMPS CONTINU

Dans ce cas, p désigne l'opérateur de **dérivation** :

$$s = \frac{d}{dt}$$

α est un réel désignant le **degré de stabilité** voulu pour le système contrôlé. On veut donc que ce système soit stable de degré α au sens entrée-sortie (Bourlès, 1986b), autrement dit que ses pôles aient une partie réelle strictement inférieure à $-\alpha$. On dira encore qu'un tel système est α -stable.

On désigne par Ω_α l'ensemble des pulsations dans le contexte de l' α -stabilité (*), c'est-à-dire :

$$\Omega_\alpha = \{s = -\alpha + i\omega, \omega \geq 0\}. \quad (2.1)$$

Soit $P(s)$ un polynôme ; on désigne par $\tilde{P}(s)$ le polynôme défini par :

$$\tilde{P}(s) = P(-2\alpha - s). \quad (2.2)$$

(*) Quelques compléments sur l' α -stabilité figurent en annexe.

Cette définition nous sera utile plus loin, dans le contexte de la factorisation spectrale.

2.2. TEMPS DISCRET

a) Représentation en q

q désigne l'opérateur d'avance défini par :

$$qx(t) = x(t+1).$$

On emploiera dans cet article la notation en q plutôt que la notation en q^{-1} , qui fait disparaître les pôles à l'origine.

Soit x_q le signal analogique dont x est l'échantillonné ; on a :

$$x(k) = x_q(kT)$$

où T désigne la période d'échantillonnage. On peut donc faire porter directement l'opérateur q sur x_q , en posant :

$$qx_q(t) = x_q(t+T).$$

Soit $s = -\alpha + i\omega$ un pôle d'un système à temps continu. Alors, il est bien connu (Aström et Wittenmark, 1984) que le pôle correspondant du système discrétisé avec blocageur d'ordre zéro est :

$$q = e^{Ts} = \frac{1}{p} e^{i\theta} \quad (2.3)$$

avec :

$$p = e^{\alpha T} \quad (2.4)$$

$$\theta = \omega T. \quad (2.5)$$

On dira donc qu'un système à temps discret est α -stable si ses pôles ont tous un module strictement inférieur à $1/p$, ou p est défini suivant (2.4) (*).

La définition (2.1) est maintenant remplacée par :

$$\Omega_\alpha = \left\{ q = \frac{1}{p} e^{i\theta}, 0 \leq \theta < \pi \right\} \quad (2.6)$$

où p et θ sont définis suivant (2.4) et (2.5).

(*) Dans (Bourlès *et al.*, 1990), nous parlions plutôt de « p -stabilité » dans cette situation. Mais la définition ci-dessus est préférable, car α est indépendant de la période d'échantillonnage, contrairement à p . De plus, elle s'accorde mieux avec une démarche unificatrice temps continu-temps discret.

Enfin, soit $P(q)$ un polynôme ; à la définition (2.2) correspond maintenant la définition :

$$\tilde{P}(q) = P(\rho^{-2}q^{-1}). \quad (2.7)$$

b) Représentation en δ

L'opérateur δ est défini par :

$$\delta = \frac{q-1}{T} \triangleq \Delta(q). \quad (2.8)$$

La transformation réciproque est donnée par :

$$q = 1 + T\delta = \Delta^{-1}(\delta). \quad (2.9)$$

On peut faire porter l'opérateur δ sur le signal analogique x_a comme on le faisait plus haut pour l'opérateur q . On obtient alors :

$$\delta x_a(t) = \frac{1}{T} (x_a(t+T) - x_a(t))$$

d'où, en supposant x_a dérivable :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \delta x_a(t) = s x_a(t). \quad (2.10)$$

Il s'ensuit que l'opérateur δ converge faiblement vers l'opérateur s quand T tend vers 0.

Soit un système discrétisé défini par une fonction de transfert en δ ; ce système est α -stable si et seulement si pour tout pôle δ de ce système, on a (d'après (2.9)) :

$$|1 + T\delta| < \rho^{-1} = e^{-\alpha T}. \quad (2.11)$$

On peut obtenir directement (sans passer par la représentation en q) la représentation en δ d'un système discrétisé avec bloqueur d'ordre 0. En effet, soit le système à temps continu défini par la représentation d'état :

$$\begin{aligned} s x_a(t) &= A x_a(t) + B u_a(t) \\ y_a(t) &= C x_a(t). \end{aligned}$$

Il est bien connu que le système discrétisé avec bloqueur d'ordre zéro s'écrit :

$$\begin{aligned} q x(t) &= F x(t) + G u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned}$$

avec :

$$F = e^{TA}, \quad G = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \cdot B.$$

La représentation en δ (sous forme d'état) de ce système est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \Phi x(t) + \Gamma u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec :

$$\Phi = \frac{1}{T} (F - I), \quad \Gamma = \frac{1}{T} G.$$

En utilisant un développement en série de l'exponentielle, on obtient :

$$\Phi = AH, \quad \Gamma = HB \quad (2.13)$$

avec :

$$H = 1 + \frac{T}{2!} A + \frac{T^2}{3!} A^2 + \dots + \frac{T^i}{(i+1)!} A^i + \dots \quad (2.14)$$

En particulier, au voisinage de $T=0$, on a les développements limités :

$$\Phi = A + O(T), \quad \Gamma = B + O(T) \quad (2.15)$$

où $O(T)$ est une fonction telle que $O(T)/T$ reste bornée au voisinage de $T=0$.

La représentation en δ a donc l'avantage de tendre continûment vers la représentation en s du système à temps continu quand la période d'échantillonnage tend vers 0.

L'ensemble des pulsations (2.6) est maintenant remplacé par son image par la transformation Δ , c'est-à-dire :

$$\Omega_a = \left\{ \delta = \frac{\rho^{-1} e^{i\theta} - 1}{T}, \quad 0 \leq \theta < \pi \right\}. \quad (2.16)$$

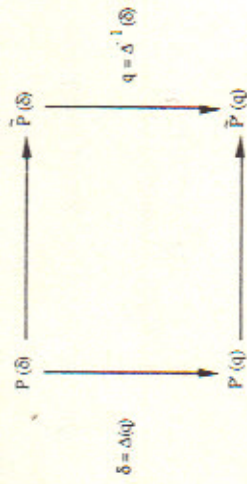
Soit $\delta \in \Omega_a$; on a alors au voisinage de $T=0$ (d'après (2.3, 2.5)).

$$\delta = -\alpha + i\omega + O(T) \quad (2.17)$$

ce qui signifie que la définition (2.16) devient semblable à (2.1) pour une période d'échantillonnage devenant infiniment petite.

Soit $P(\delta)$ un polynôme. Nous allons à présent définir une fraction rationnelle $\tilde{P}(\delta)$ correspondant, dans le cadre de la représentation en δ ,

aux définitions (2.2) et (2.7) précédentes. $\tilde{P}(\delta)$ est défini de telle sorte que le diagramme suivant soit commutatif :



On a :

$$\tilde{P}'(q) = P'(p^{-2}q^{-1}) = P'(p^{-2}(1 + T\delta)^{-1}) \tag{2.18}$$

On a d'autre part :

$$\frac{1}{p^2(1 + T\delta)} = 1 + T\delta' \tag{2.19}$$

avec :

$$\delta' = -\beta - \delta'' \tag{2.20}$$

où :

$$\beta = \frac{1 - p^{-2}}{T} \tag{2.21}$$

$$\delta'' = \frac{\delta}{p^2(1 + T\delta)} \tag{2.22}$$

D'après le diagramme ci-dessus, on a donc :

$$\tilde{P}'(\delta) = P'(\delta') \tag{2.23}$$

La méthode pour obtenir \tilde{P} en partant de P est donc simple à mettre en oeuvre :

- i) Effectuer la transformation (2.20), qui est de même nature que (2.2).
- ii) Effectuer la transformation (2.22), qui est bilinéaire.

Pour les faibles périodes d'échantillonnage, on a :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{T} = 2\alpha + O(T) \\ \delta'' &= \delta + O(T) \end{aligned} \tag{2.24}$$

d'où :

$$\tilde{P}'(\delta) = P'(-2\alpha - \delta) + O(T)$$

On retrouve donc au premier ordre la définition (2.2).

Remarque : Propriété de \tilde{P}

Soit $p = s, q$ ou δ . D'après les définitions qui précèdent, il est clair que :

$$p \in \Omega_u \Rightarrow \tilde{P}(p) = \overline{P(p)} \quad (\text{complexe conjugué}).$$

Par conséquent :

$$P(p) \tilde{P}(p) = |P(p)|^2, \quad \forall p \in \Omega_u \tag{2.25}$$

3. Commande par retour d'état partiel

Quand aucune précision ne sera apportée, p désignera dans ce qui suit l'un quelconque des opérateurs s, q ou δ .

3.1. ÉTAT PARTIEL ET RETOUR D'ÉTAT PARTIEL (Kailath, 1980)

Soit le système d'équation :

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \tag{3.1}$$

où $\deg(A) = n_A$ et $\deg(B) \leq n_A - 1$ (*).

L'état partiel est un signal $\xi(t)$ tel que :

$$y(t) = B(p)\xi(t) \tag{3.2}$$

$$u(t) = A(p)\xi(t) \tag{3.3}$$

Considérons maintenant une représentation d'état de dimension n_A du système (3.1), et soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_A})^T$ le vecteur d'état. Alors, chaque composante x_i de x est de la forme :

$$x_i = X_i(p)\xi \tag{3.4}$$

où $X_i(p)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_A - 1$.

En particulier, si l'on a choisi la forme contrôleur, on a $X_i(p) = p^{n-i}$, avec $n = n_A$.

Soit maintenant une commande par retour d'état :

$$u = u^* - Gx = u^* - [G_1 \dots G_{n_A}]x, \tag{3.5}$$

(*) Dans ce qui suit, pour tout polynôme P, n_p désignera son degré.

où u^* désigne un signal de consigne. Il vient d'après (3.4) :

$$u = u^* - K(p) \xi \tag{3.6}$$

où

$$K(p) = G_1 X_1(p) + \dots + G_{n_A} X_{n_A}(p).$$

$K(p)$ est un polynôme de degré $n_A - 1$.

Une commande par retour d'état telle que (3.5) peut donc être interprétée comme une commande par retour (polynomial) d'état partiel suivant (3.6) (voir fig. 1). On posera :

$$v(t) = K(p) \xi(t). \tag{3.7}$$

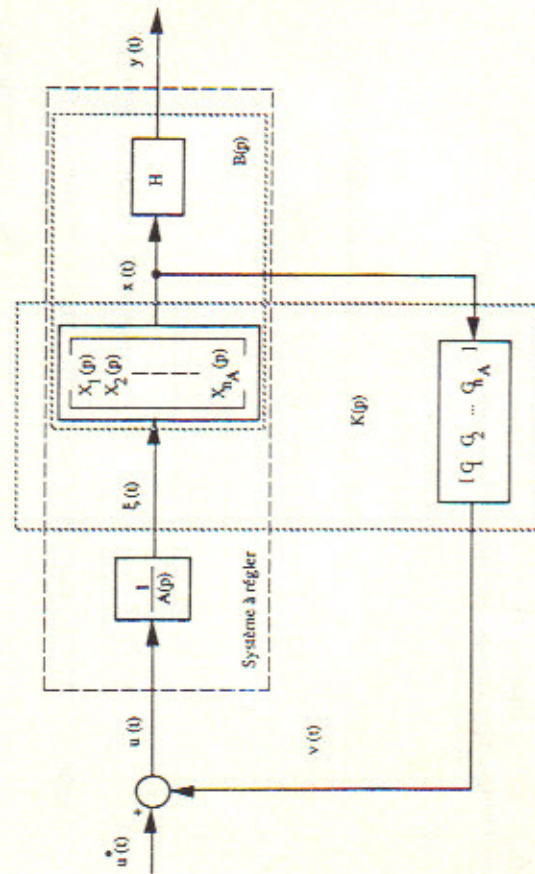


Figure 1. — Interprétation d'une commande par retour d'état en tant que commande par retour (polynomial) d'état partiel.

Équations du système contrôlé :

D'après (3.1), (3.2), (3.6), on obtient :

$$\xi = \frac{1}{P(p)} v$$

avec :

$$P(p) = A(p) + K(p) \tag{3.8}$$

Il vient donc d'après (3.2) et (3.3) :

$$y = \frac{B}{P} v, \quad u = \frac{A}{P} v \tag{3.9}$$

$P(p)$ est donc le polynôme caractéristique de la boucle fermée.

La fonction de transfert de la boucle ouverte, $L(p)$, est donnée (d'après la figure 1) par :

$$L(p) = \frac{K(p)}{A(p)} \tag{3.10}$$

3.2. LA COMMANDE LQ ET SES PROPRIÉTÉS DE ROBUSTESSE

3.2.1. *Propriété caractéristique des commandes LQ (Kwakernaak et Sivan, 1972), (Aström et Wittenmark, 1984)*

On suppose dans ce qui suit que le système (3.1) est « α -stabilisable » dans le sens suivant : si les polynômes $A(p)$ et $B(p)$ ont des racines communes, alors ces racines vérifient la condition d' α -stabilité :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(p) &< -\alpha && \text{pour } p = s \\ |p| &< \rho^{-1} && \text{pour } p = q \\ |1 + Tp| &< \rho^{-1} && \text{pour } p = \delta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Il existe alors une commande par retour d'état partiel (3.6) minimisant l'indice de performance :

$$J = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} (y^2(t) + \mu_c u^2(t)) dt \tag{3.12a}$$

(cas du temps continu).

$$J = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^{2r} (y^2(t) + \mu_c u^2(t)) \tag{3.12b}$$

(cas du temps discret), avec $\mu_c > 0$ et $\alpha \geq 0$.

Le polynôme caractéristique P définissant cette commande est donné par l'équation de factorisation spectrale :

$$(1 + v_c) P \tilde{P} = A \tilde{A} + \mu_c^{-1} B \tilde{B} \tag{3.13}$$

P est en effet l'unique polynôme normalisé de degré n_A , n'ayant que des

racines respectant la condition d' α -stabilité (3.11), et vérifiant l'équation (3.13) (Kwakernaak et Sivan, 1972 ; Aström et Wittenmark, 1984) :

- Dans ce cas continu, on a $\varepsilon_c = 0$.
- Dans le cas discret, ε_c est un réel positif donné par :

$$\varepsilon_c = -1 + \frac{A(p_0)\tilde{A}(p_0) + \mu_c^{-1}B(p_0)\tilde{B}(p_0)}{P(p_0)\tilde{P}(p_0)}$$

pour une valeur quelconque p_0 de p .

Exemple : Soit le système (3.1) avec $p = q$ et $A(q) = q$, $B(q) = 1$ (retard pur). Considérons d'autre part l'indice de performance (3.12b) avec $\rho = 1$ (c'est-à-dire $\alpha = 0$) et $\mu_c = 1$. On obtient :

$$A(q)\tilde{A}(q) + B(q)\tilde{B}(q) = 2.$$

D'où $P(q) = q$ et $\varepsilon_c = 1$.

Remarque : La propriété caractéristique (3.13) est classique dans le cas $\alpha = 0$ (Kwakernaak et Sivan, 1972), (Aström et Wittenmark, 1984). Le cas $\alpha \neq 0$ s'y ramène facilement en effectuant le changement de variable :

$$y_\alpha(t) = e^{\alpha t}y(t), \quad u_\alpha(t) = e^{\alpha t}u(t) \tag{3.14a}$$

pour le cas continu, ou

$$y_\alpha = \rho' y(t), \quad u_\alpha(t) = \rho' u(t) \tag{3.14b}$$

pour le cas discret.

Convergence de ε_c vers zéro :

Il est montré dans (Bourlès et al., 1990) que :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \varepsilon_c = 0 \tag{3.15}$$

On verra plus loin que ce résultat est très important du point de vue de la robustesse. On l'obtient très facilement ici en utilisant la formulation en δ ; il s'agit en effet d'une conséquence immédiate de (2.24).

3.2.2. Robustesse des commandes LQ (Anderson et Moore, 1971 ; Safonov, 1980 ; Bourlès et al., 1990)

La propriété (3.13) a une conséquence très importante sur le lieu de Nyquist d'un système muni d'une commande LQ, et, partant, sur sa robustesse.

Rappelons que puisque c'est l' α -stabilité qu'on désire obtenir (et non la stabilité ordinaire, ou 0-stabilité), le lieu Nyquist à considérer est la représentation dans le plan complexe de $L(p)$, $p \in \Omega_\alpha$, de sorte que pour $\alpha = 0$ on retrouve le lieu de Nyquist habituel (Bourlès, 1986a). Or d'après (3.13) et (2.25), on a pour $p \in \Omega_\alpha$.

$$(1 + \varepsilon_c)|P(p)|^2 = |A(p)|^2 + \mu_c^{-1}|B(p)|^2.$$

On a d'après (3.10) et (3.8) :

$$1 + L(p) = \frac{P(p)}{A(p)}. \tag{3.16}$$

D'où pour $p \in \Omega_\alpha$:

$$|1 + L(p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_c} \left| 1 + \mu_c^{-1} \frac{|B(p)|^2}{|A(p)|^2} \right| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon_c},$$

d'où encore :

$$|1 + L_c(p)| \geq a \triangleq \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_c}}. \tag{3.17}$$

Le lieu de Nyquist évoqué plus haut a donc la caractéristique d'être extérieur au disque de centre -1 et de rayon a (voir fig. 2).

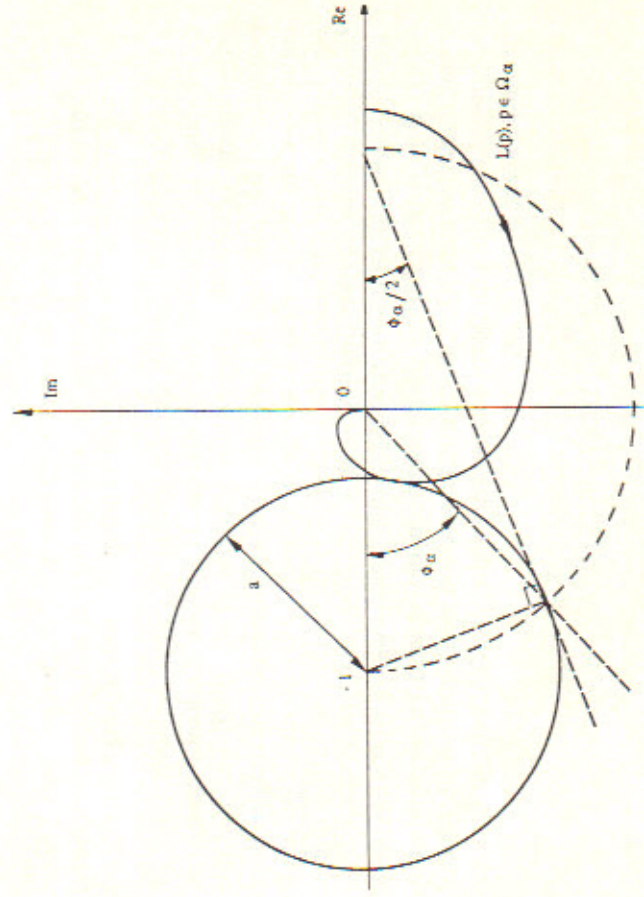


Figure 2. — Lieu de Nyquist de la boucle ouverte avec commande LQ.

On déduit de la figure précédente les propriétés de robustesse suivantes :

marge de gain-phase (MGP) :

$$\text{MGP} \geq a \quad (3.18a)$$

— marge de gain (MG) :

$$\text{MG} \geq \left[\frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1-a} \right] \quad (3.18b)$$

— marge de phase (MP) :

$$\text{MP} \geq \phi_0 \triangleq 2 \arcsin \left(\frac{a}{2} \right) \quad (3.18c)$$

Précisons bien que les relations (3.18b), (3.18c) caractérisent les gains et les déphasages parasites pour lesquels l' α -stabilité du système bouclé est conservée.

Pour $T = 0$ (temps continu), on a $\varepsilon_c = 0$, et on obtient les garanties classiques :

$$\text{MGP} = 1 \quad (3.19a)$$

$$\text{MG} \geq \left[\frac{1}{2}, \infty \right] \quad (3.19b)$$

$$\text{MP} \geq 60^\circ \quad (3.19c)$$

La propriété (3.15) montre que ces garanties restent valables pour les commandes LQ à temps discret **dès que la période d'échantillonnage est suffisamment faible**. On indique dans (Bourlès *et al.*, 1990) une formule permettant de calculer la période d'échantillonnage maximale pour laquelle on ne détériore pas la marge de phase (3.19c) de plus d'un angle $\Delta\phi$ donné. Cette formule utilise les matrices de la représentation d'état, ainsi que la solution de l'équation de Riccati du temps continu : supposons que la représentation d'état du système soit définie par le triplet matriciel (C, A, B) , que les matrices de pondération de l'état et de la commande soient respectivement Q et R , et que la solution de l'équation de Riccati associée soit P . Alors un ordre de grandeur de la période d'échantillonnage maximale admissible T^* est donné par :

$$T^* \approx \sqrt{3} \frac{\sigma(R)}{\bar{\sigma}(B^T P B)} \Delta\phi,$$

où σ et $\bar{\sigma}$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur singulière, et où $\Delta\phi$ est exprimé en radians.

Marge de retard :

Si l'on considère le cas continu, on voit que quelle que soit la pondération μ_c , on aura toujours les mêmes garanties de robustesse (3.19). Or, pour de faibles valeurs de μ_c et de grandes valeurs α , on obtient un système contrôlé très rapide, et la robustesse signifie alors qu'en présence de gains et de déphasages parasites l' α -stabilité est conservée, donc la grande rapidité de la boucle fermée ! Pourtant, on sent bien intuitivement qu'un système contrôlé très rapide est peu robuste.

De plus, supposons qu'on multiplie la commande par un facteur $\lambda > 1$. Alors, par homothétie, le lieu de Nyquist de la fonction de transfert de la boucle ouverte va se trouver extérieur au disque de centre $-1/\lambda$ et de rayon λ . Puisque ce disque contient le disque de centre -1 et de rayon 1, on a l'impression d'avoir augmenté la robustesse. Or, cette fois encore, on a rendu la boucle fermée plus rapide.

La situation est donc très paradoxale. Selon nous, la raison de ce paradoxe est que la marge de gain-phase et la marge de phase sont des critères de robustesse insuffisants.

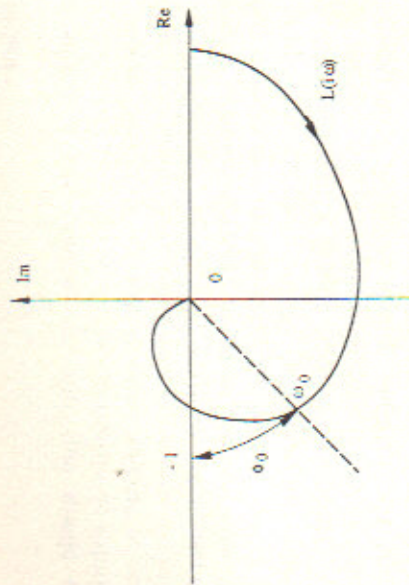
Supposons maintenant qu'il s'introduise dans la boucle de régulation un retard parasite τ , de fonction de transfert $e^{-s\tau}$. Pour $s = i\omega$, ce retard se traduit donc par un déphasage égal à $-\omega\tau$, tendant vers l'infini avec la pulsation ω . Une marge de phase de 60° (ou davantage) n'est donc d'aucune signification dans une situation comme celle-ci. Or, **une erreur de modèle tend toujours à se comporter comme un retard** : faible dans les basses fréquences (car le gain statique est généralement bien connu), elle devient très grande dans les hautes fréquences. Il est donc beaucoup plus réaliste de modéliser une erreur de modèle par un retard parasite, plutôt que par un déphasage parasite. Ces considérations amènent à poser la définition suivante :

Définition de la marge de retard :

« La marge de retard MR est la borne supérieure des retards parasites pour lesquels la boucle fermée reste stable ».
(Il est à noter que cette notion est déjà utilisée dans (Anderson et Moore, 1971).)

Remarque : On pouvait être tenté d'appeler « marge de retard » la borne supérieure des retards parasites pour lesquels la boucle fermée reste α -stable (plutôt que 0-stable). Mais cette marge serait peu pratique à déterminer.

La marge de retard suivant la définition donnée plus haut, se calcule très facilement à partir du lieu de Nyquist habituel (voir fig. 3).

Figure 3. — Définition de la marge de phase ϕ_0 et de la pulsation ω_0 .

Soit ϕ_0 la marge de phase (relativement à la stabilité ordinaire) et ω_0 la pulsation au gain unité, c'est-à-dire :

$$|L(i\omega_0)| = 1. \quad (3.20)$$

Alors, la marge de retard MR est donnée par :

$$MR = \frac{\phi_0}{\omega_0}. \quad (3.21)$$

Exemple : Considérons comme système à régler un intégrateur pur, c'est-à-dire $A(s) = s$, $B(s) = 1$. Il est facile de déterminer par l'équation (3.13) la dynamique de la boucle fermée correspondant à la minimisation de l'indice de performance (3.12). En posant $\omega_c^2 = 1/\mu_c$, le polynôme caractéristique $P(s)$ prend l'expression :

$$P(s) = s + \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}.$$

On a donc d'après (3.10), (3.8) :

$$L(s) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}}{s}.$$

Par conséquent, d'après (3.20) :

$$\omega_0 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}.$$

D'après (3.19), on a $\phi_0 \approx MP \approx \frac{\pi}{3}$ rad (on a en fait $\phi_0 > \pi/2$ dans le cas

présent), mais on observe que $\omega_0 \rightarrow \infty$ quand $\alpha \rightarrow \infty$ ou $\mu_c \rightarrow 0$. Il s'ensuit que la marge de retard devient infiniment petite quand on accélère infiniment le système en prenant $\alpha \rightarrow \infty$ ou $\mu_c \rightarrow 0$.

Grâce à cette notion de marge de retard, l'intuition et le bon sens cessent donc d'être contredits.

La définition de la marge de retard a été donnée dans le cas continu ; elle s'étend évidemment au cas discret en utilisant la transformation en w ou la transformation correspondante quand on utilise la représentation en δ , soit :

$$w = \frac{2q-1}{Tq+1} = \frac{\delta}{1 + \frac{T}{2}\delta}.$$

4. Commande avec observateur

4.1. OBSERVATEUR

Il était supposé dans la Section 3 que le signal $v = K(p)\xi = Gx$ pouvait être formé à chaque instant, de manière à obtenir la commande $u = u^* - v$ (voir fig. 1). On se propose maintenant de lever cette hypothèse. Le signal $v(t)$ étant dès lors inconnu, il est remplacé par son estimée $\hat{v}(t)$.

Cette estimée est exprimée de façon linéaire et stationnaire en fonction de u et de y . L'observateur fournissant \hat{v} est donc de la forme :

$$C(p)\hat{v}(t) = Q(p)u(t) + R(p)y(t) \quad (4.1)$$

où $C(p)$, $Q(p)$, $R(p)$ sont des polynômes, les racines de $C(p)$ vérifiant la condition d' α -stabilité (3.11).

Le polynôme $C(p)$ caractérise la **dynamique de l'observateur**. On imposera en effet à l'erreur d'observation $\hat{v} - v$ de satisfaire à l'équation.

$$C(p)[\hat{v}(t) - v(t)] = 0, \quad \forall t. \quad (4.2)$$

D'après (3.2), (3.3), (3.7), on obtient :

$$[Q(p)A(p) + R(p)B(p)]\xi(t) = C(p)K(p)\xi(t).$$

Cette expression est vérifiée pour tout $\xi(t)$ si et seulement si l'équation de Bezout suivante est vérifiée :

$$[C(p)Q(p) + B(p)R(p) - K(p)C(p)] \quad (4.3)$$

Condition d'alpha-stabilisabilité :

L'équation (4.3) admet une solution (Q, R) si et seulement si les facteurs communs de A(p) et B(p) (s'ils existent) sont des diviseurs de K(p)C(p), ou encore de P(p)C(p) d'après (3.8). Or, on verra plus loin que P(p)C(p) est précisément le polynôme de la boucle fermée. Cette boucle fermée peut donc être rendue alpha-stable si et seulement si le système (3.1) est alpha-stabilisable (dans le sens précisé plus haut). Cette condition d'alpha-stabilisabilité sera supposée vérifiée dans toute la suite.

4.2. STRUCTURE DU RÉGULATEUR

La commande a maintenant pour expression :

u(t) = u*(t) - v(t) . (4.4)

Le schéma de cette commande est représenté sur la figure 4 ; le régulateur ainsi obtenu prend en compte une éventuelle saturation à l'entrée des actionneurs (Aström et Wittenmark, 1984). Ce point mis à part, on retrouve ici le schéma de (Kailath, 1980), p. 298.

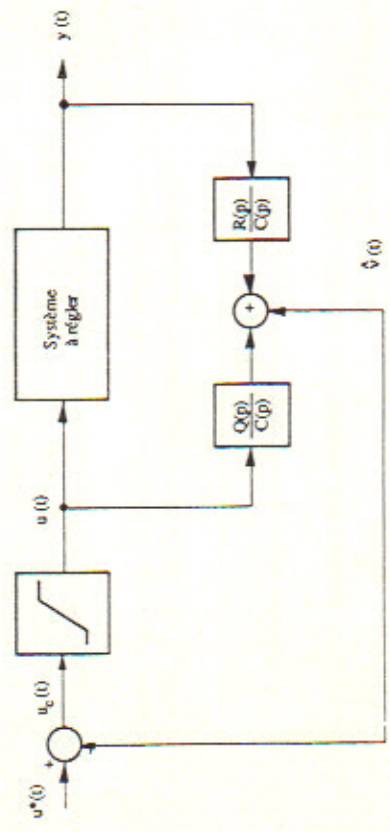


Figure 4. — Structure du régulateur.

Fonctionnement linéaire :

Lorsque la saturation est inactive (c'est-à-dire pour u = u_c), on a d'après (4.1), (4.4) :

u = u* - [Q/C u + R/C y] ,

soit encore :

Su = - Ry + T1 u* .

avec :

S = Q + C (4.6)

T1 = C . (4.7)

Il est bien connu que le polynôme caractéristique de la boucle fermée est, pour un régulateur de la forme (4.5) :

A_bf = AS + BR . (4.18)

D'après (4.6), (4.3), (3.8), on obtient :

1_n - PC (4.19)

Degré du polynôme C :

La commande (4.4) n'est réalisable que si les fonctions de transfert de l'observateur Q/C et R/C sont des fractions rationnelles propres ou strictement propres. Il est bien connu (Kailath, 1980, § 4.5.3) que ceci est vérifié si :

deg(C) ≥ n_A - 1 . (4.20)

Cette condition est démontrée au § 6.2, dans le contexte plus général où un modèle interne (au sens de Francis et Wonham) est utilisé.

Il existe alors une solution unique (R, S) à l'équation de Bezout (4.3) (ou (4.18), (4.19)) vérifiant la condition de degré :

deg(R) ≤ n_A - 1 . (4.21)

Remarque : Il existe des cas particuliers où la condition (4.20) n'est pas nécessaire. Par exemple :

A(s) = s^2 + s , B(s) = 1 , P(s) = s^2 + s + 1 , C(s) = 1 .

On réalise alors le placement de pôles avec un retour unitaire.

La condition (4.20) devient nécessaire si on demande aux fonctions de transfert Q/C et R/C d'être propres quelles que soient les valeurs des paramètres.

Le cas où deg(C) = n_A - 1 correspond, dans la formulation par représentation d'état, à l'emploi d'un observateur réduit de Luenberger ; le cas où deg(C) = n_A correspond à l'emploi d'un observateur d'état complet (Kailath, 1980).

4.3. COMMANDE LQG POUR L'alpha-STABILITÉ

La théorie LQG habituelle fournit une méthode pour concevoir un régulateur polynomial (ou équivalent) pour lequel le système contrôlé

nominal est 0-stable. Le système à régler est supposé de la forme :

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) + E(p)w(t) \quad (4.22)$$

où :

$$E(p) = p^{n_E} + e_1 p^{n_E-1} + \dots + e_{n_E}$$

et où $w(t)$ est un bruit blanc gaussien stationnaire. On détermine alors le régulateur polynomial pour lequel le critère J_0 est minimal, avec :

$$J_0 = E \{ y^2(t) + \mu_c u^2(t) \}.$$

Aström et Wittenmark (1984) ont proposé une extension de la théorie LQG, permettant d'obtenir un système contrôlé α -stable. Cette extension consiste à remplacer le critère J_0 par le critère J_α défini par :

$$J_\alpha(t) = E \{ y_\alpha^2(t) + \mu_c u_\alpha^2(t) \} \quad (4.23)$$

où y_α et u_α sont définis suivant (3.14). Mais Aström et Wittenmark ont omis le fait que dans ce cas, le bruit blanc $w(t)$ est lui-même remplacé par un $w_\alpha(t)$, qui est toujours un bruit blanc, mais qui n'est plus stationnaire et a une variance tendant vers l'infini. Il s'ensuit que le critère J_α n'est plus stationnaire et que $J_\alpha(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

On est donc amené à supprimer le bruit blanc $w(t)$ d'une nature telle que $w_\alpha(t)$ soit stationnaire, et donc à poser la définition suivante :

DÉFINITION (α -stationnarité) : « Soit $w(t)$ un signal aléatoire. Ce signal est dit « α -stationnaire », si le signal aléatoire $w_\alpha(t)$, défini suivant (3.14), est stationnaire. »

Le bruit blanc gaussien $w(t)$ est désormais supposé α -stationnaire.

Remarque : Un signal aléatoire α -stationnaire (avec $\alpha > 0$) a une variance tendant exponentiellement vers zéro. Il est certain que cette modélisation est peu réaliste. En fait, nous ne cherchons pas ici à modéliser la réalité, mais plutôt à poser un cadre d'hypothèses conduisant à une solution ayant les propriétés recherchées. Autrement dit, le paramètre α ne doit pas être considéré ici comme une propriété de la physique, mais comme un paramètre de synthèse.

Factorisation spectrale :

Supposons que le polynôme $E(p)$ n'ait pas de racine appartenant à Ω_α (*). Dans ce cas, le signal aléatoire $E(p)w(t)$ a les mêmes propriétés stochastiques que le signal aléatoire $E^*(p)w(t)$, où $E^*(p)$ est le polynôme satisfaisant à la définition ci-dessous :

(*) Si $E(p)$ a certaines racines sur Ω_0 , on peut choisir $\alpha > 0$ pour que la condition ci-dessus soit vérifiée. C'est l'un des avantages de l' α -stabilité que de rendre la factorisation spectrale toujours possible grâce au libre choix de α .

DÉFINITION DE E^* : Soit $E(p)$ un polynôme ; $E^*(p)$ est le polynôme vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- i) $E^*(p)$ a même coefficient de plus haut degré que E (c'est-à-dire 1 dans le cas présent).
- ii) Toutes les racines de $E^*(p)$ sont α -stables.
- iii) Il existe un réel ε tel qu'on ait l'égalité :

$$(1 + \varepsilon) E^*(p) \tilde{E}^*(p) = E(p) \tilde{E}(p).$$

Il est maintenant possible de résoudre le problème LQG (4.23). Le cas correspondant à $\alpha \neq 0$ se déduit du cas $\alpha = 0$ en faisant le changement de variable (3.14). On obtient donc le résultat suivant :

Soit le système à régler (4.22), supposé α -stabilisable, où $w(t)$ est un bruit blanc gaussien α -stationnaire. Alors, le régulateur polynomial pour lequel le critère J_α est minimum a la structure indiquée par la figure 4 (ou par l'équation (4.5) dans le cas du fonctionnement linéaire) où :

- $C = E^*$ (4.24)
- P est défini par l'équation (3.13)
- Q et R sont calculés par résolution de l'équation de Bezout (4.3).

Remarque : Pour que la condition (4.20) soit vérifiée, on est amené à supposer que $n_E \geq n_A - 1$. Nous ferons cette hypothèse dans toute la suite. Notons que $n_E \geq n_A$ dès que la modélisation (4.22) tient compte du bruit de mesure. Le problème LQG habituel correspond à $n_E = n_A$. Lorsque $n_E = n_A - 1$, la solution LQG fournit un observateur d'état réduit de Luenberger.

Annexe

Compléments sur l' α -stabilité

1. Soit un système d'équation :

$$A(s)y(t) = B(s)u(t). \quad (A.1)$$

Ce système est α -stable (au sens entrée-sortie) si et seulement si les racines de $A(s)$ vérifient l'inégalité $\text{Re}(s) < -\alpha$. (Pour une définition et une étude de l' α -stabilité des systèmes généraux, voir (Bourlès, 1986b).)

2. Effectuons le changement de variable (3.14, ω) ; on obtient, d'après les propriétés bien connues de la transformée de Laplace :

$$A_\alpha(s) y_\alpha(t) = B_\alpha(s) u_\alpha(t) \quad (\text{A1.2})$$

avec :

$$A_\alpha(s) = A(s - \alpha) \quad \text{et} \quad B_\alpha(s) = B(s - \alpha). \quad (\text{A1.3})$$

On a $A(z) = 0$ si et seulement si $A_\alpha(\alpha + z) = 0$. Autrement dit, z est une racine de $A(s)$ si et seulement si $z + \alpha$ est une racine de $A_\alpha(s)$.

Par conséquent, le système (A1.1) est α -stable si et seulement si le système (A1.2) est 0-stable.

3. Supposons que le système (A1.1) soit contrôlé par un retour unitaire :

$$u = -y. \quad (\text{A1.4})$$

Ceci équivaut à dire que le système « déstabilisé » (A1.2) est contrôlé par le retour unitaire.

$$u_\alpha = -y_\alpha. \quad (\text{A1.5})$$

La 0-stabilité du système contrôlé (A1.4), (A1.5) peut s'étudier par le critère de Nyquist ; on est alors amené à tracer dans le plan complexe l'image par la fonction de transfert $B_\alpha(s)/A_\alpha(s)$ de « l'ensemble des pulsations »

$$\Omega_0 = \{s = i\omega, \omega \geq 0\}.$$

Or, ce lieu est identique (d'après (A1.3)) à l'image par la fonction de transfert $B(s)/A(s)$ de l'ensemble Ω_α défini suivant (2.1).

4. Soit $D(\alpha)$ « l'opérateur de déstabilisation » :

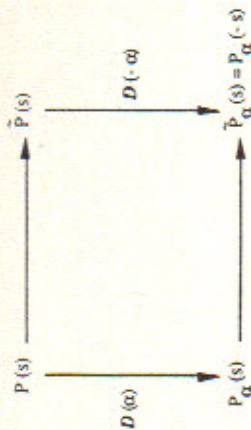
$$P(s) \xrightarrow{D(\alpha)} P_\alpha(s) = P(s - \alpha).$$

Posons d'autre part :

$$\tilde{P}_\alpha(s) = P_\alpha(-s).$$

Alors, le polynôme $P(s)$ défini suivant (2.2) peut être obtenu en rendant commutatif le diagramme suivant :

R.A.I.R.O. APII



Ce procédé est sans doute le plus pratique sur le plan de la mise en œuvre numérique.

5. L'équation de factorisation spectrale (3.13) équivaut, avec les notations précédentes, à l'équation classique :

$$(1 + \varepsilon_c) P_\alpha(s) P_\alpha(-s) = A_\alpha(s) A_\alpha(-s) + \mu_c^{-1} B_\alpha(s) B_\alpha(-s) \quad (\text{A1.5})$$

avec ici $\varepsilon_c = 0$ puisque c'est le cas continu qui est envisagé.

On obtient alors P_α en sélectionnant les racines z_i ($1 \leq i \leq n_A$) du second membre de (A1.5), vérifiant $\text{Re}(z_i) < 0$. En effet on a :

$$P_\alpha(s) = \prod_{i=1}^{n_A} (s - z_i).$$

Une fois obtenu $P_\alpha(s)$, on obtient évidemment $P(s)$ par : $P(s) = P_\alpha(s + \alpha)$.

6. Les considérations qui précèdent, valables pour le temps continu, se transposent sans difficulté au cas du temps discret.

RÉFÉRENCES

- B. D. O. ANDERSON, J. B. MOORE (1971), *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall.
 K. J. ÅSTRÖM, B. WITTENMARK (1984), *Computer Controlled System-Theory and Design*, Prentice-Hall.
 H. BOURLÈS (1986a), *Stabilité et Robustesse de degré α ; application à la mise au point d'un régulateur*, Proc. Colloque SMAI « L'Automatique pour l'Aéronautique », Paris, Cepadues-Éditions.
 H. BOURLÈS (1986b), *Stabilité de degré α des systèmes régis par une équation différentielle fonctionnelle*, RAIRO Automat.-Prod. Inform. Ind., vol. 20, n° 5, pp. 455-473.
 H. BOURLÈS, Y. JOANNIC, O. L. MERCIER (1990), *p-Stability and Robustness : the discrete-time case*, Internat. J. Control, vol. 52, n° 5, 1217-1239.

- J. C. DOYLE, G. STEIN (1979), *Robustness with observers*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-24, pp. 607-611.
- J. C. DOYLE, G. STEIN (1981), *Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis*, IEEE Trans. Automat. Control, 26, pp. 4-16.
- T. KAILATH (1980), *Linear Systems*, Prentice-Hall.
- V. KUCERA (1979), *Discrete Linear Control. The Polynomial Equation Approach*, Wiley.
- H. KWAKERNAK, R. SIVAN (1972), *Linear Optimal Control Systems*, Wiley.
- R. H. MIDDLETON, G. C. GOODWIN (1986), *Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-31, pp. 1015-1021.
- M. G. SAFONOV, M. ATHANS (1977), *Gain and Phase Margin for multiloop LQG Regulators*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-22, n° 2, pp. 143-179.
- M. G. SAFONOV (1980), *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, MIT Press.
- P. SOGAARD-ANDERSEN (1987), *Loop Transfer recovery with minimal-order observers*, Proc. 28^e CDC, Los Angeles, pp. 933-938.
- C. C. TSUI (1987), *On preserving the robustness of an optimal control system with observers*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-32, n° 9, pp. 823-826.
- C. C. TSUI (1988), *On robust observer compensator design*, Automatica, vol. 24, n° 5, pp. 687-692.

La méthode LQG/LTR : une interprétation polynomiale temps continu/temps discret

Deuxième partie (*)

H. BOURLÈS (1) et E. IRVING (1)

Résumé/Abstract

Dans cette deuxième partie de l'article, on commence par étudier la Restitution du Transfert de Boucle (RTB); ce principe est mieux connu sous l'abréviation anglaise LTR. On établit tout d'abord la condition nécessaire et suffisante (purement algébrique) de RTB, qui ne peut être satisfaite en pratique, sauf dans des cas très particuliers. Puis on montre qu'il existe une famille de régulateurs LQG qui réalise la RTB asymptotiquement dans le cas des systèmes à temps continu et à minimum de phase. Le cas discret et le cas des systèmes à non minimum de phase est ensuite envisagé. L'effet de la RTB sur la sensibilité au bruit de mesure est également étudié. On termine par la poursuite robuste avec rejet de perturbation, avec comme application une méthode générale de détermination du PID.

In this second part of the paper, Loop Transfer Recovery (LTR) is first studied. The algebraic necessary and sufficient condition of LTR is established; this condition cannot be met in practice, except in very special cases. Then, it is shown that there exists a family of LQG controllers which achieves asymptotically LTR in the case of continuous-time and minimum phase systems. The discrete-time case and the case of non minimum phase systems is then considered. The effect of LTR on the sensitivity to the measurement noise is also studied. The paper ends with robust tracking and disturbance rejection, with a general PID design method as an application.

Mots clés/Keywords

Robustesse ; Observateur ; LQG/LTR ; Delta ; Polynomial ; Marge de retard ; PID.

Robustness ; Observer ; LQG/LTR ; Delta ; Polynomial ; Delay margin ; PID.

(*) Reçu en mars 1990.

(1) Direction des Études et Recherches EDF, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, France.

5. Restitution du transfert de boucle (RTB) (Loop Transfer Recovery, « LTR »)

5.1. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE RTB

Les propriétés de robustesse de la Section 3 ne sont valables que lorsque la commande utilisée est à retour d'état complet (ou, ce qui revient au même, à retour polynomial d'état partiel). La robustesse d'une régulation (vis-à-vis d'erreurs non structurées) est déterminée par la fonction de transfert de la boucle ouverte, $L(p)$.

Dans le cas d'un retour d'état partiel, $L(p)$ est donnée par (3.10), d'où d'après (3.8) :

$$1 + L(p) = \frac{P(p)}{A(p)} \tag{5.1}$$

Dans le cas du régulateur polynomial (4.5), on a :

$$L(p) = \frac{R(p) B(p)}{S(p) A(p)}$$

d'où d'après (4.12), (4.14) :

$$1 + L(p) = \frac{P(p) C(p)}{A(p) S(p)} = \frac{P(p)}{A(p)} \frac{1}{1 + Q(p)/C(p)} \tag{5.2}$$

L'égalité entre les fonctions de transfert (5.1) et (5.2) (autrement dit, la propriété RTB) est donc vérifiée si et seulement si :

$$C(p) = S(p) \tag{5.3}$$

soit encore :

$$Q(p) = 0 \tag{5.4}$$

5.2. CAS D'UN SYSTÈME À MINIMUM DE PHASE

En reportant (5.4) dans l'équation de Bezout (4.3), on obtient la condition :

$$B(p) R(p) = K(p) C(p) \tag{5.5}$$

Dans le cas où $B(p)$ est un polynôme α -stable, la manière générale de réaliser cette égalité consiste à choisir des polynômes $C(p)$ et $R(p)$ de la forme :

$$\begin{matrix} C = \lambda B \\ R = \lambda K \end{matrix} \tag{5.6}$$

Interprétation de (5.6) (voir fig. 5)

On voit sur cette figure qu'il y a simplification de λ ; il ne sert donc à rien de prendre pour λ autre chose qu'une constante. D'autre part, il apparaît de façon très évidente sur cette figure la manière dont la RTB est réalisée grâce au choix (5.6). La boucle de ce schéma est en effet manifestement équivalente à la boucle du schéma de la figure 1.

On note que l'état partiel est reconstruit en simplifiant le polynôme B . Il est clair que le régulateur obtenu n'a une fonction de transfert propre que si :

$$\text{deg}(B) \geq \text{deg}(K) \tag{5.7}$$

Dans le cas où cette condition ne serait pas vérifiée (quand on considère la représentation en s ou la représentation en δ), on aurait une commande très agitée par le bruit de mesure haute fréquence, ce qui serait inacceptable. C'est pourquoi on est amené à envisager un compromis entre cette agitation de la commande et la RTB parfaite.

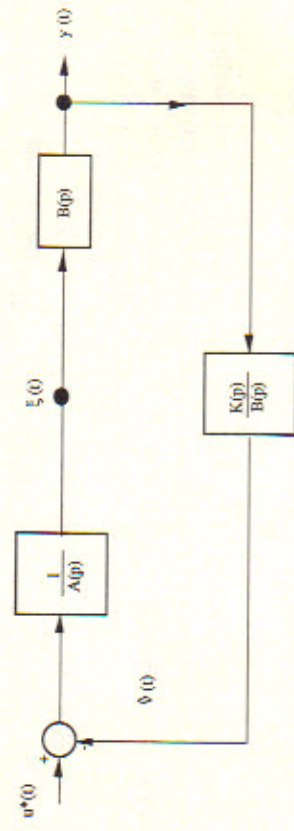


Figure 5. — RTB (5.6).

Le compromis de Doyle (Doyle et Stein, 1979, 1981).

Doyle a proposé, pour le cas continu, un compromis robustesse-rejet du bruit (*).

(*) Bien entendu, Doyle a utilisé la représentation d'état et non la représentation polynomiale. Son observateur est un filtre de Kalman (et est donc d'état complet). D'après une remarque précédente, l'approche utilisée ici contient le cas de l'observateur d'état complet et celui de l'observateur réduit de Luenberger, comme d'ailleurs tous les types d'observateurs. En effet, seul le degré de E fait qu'on est dans un cas ou dans l'autre. Notons par ailleurs que la RTB peut être satisfaite exactement si $n_B = n_A - 1$; en effet, le choix (5.6) devient alors possible, et il correspond à l'utilisation d'un observateur réduit particulier.

Supposons le système régi par l'équation (4.22). La proposition de Doyle consiste à supprimer qu'un bruit blanc gaussien fictif $w'(t)$, indépendant de $w(t)$, vient s'ajouter à la commande de ce système (voir fig. 6).

En vue de l' α -stabilité du système contrôlé, nous supposons ce bruit blanc $w'(t)$ α -stationnaire.

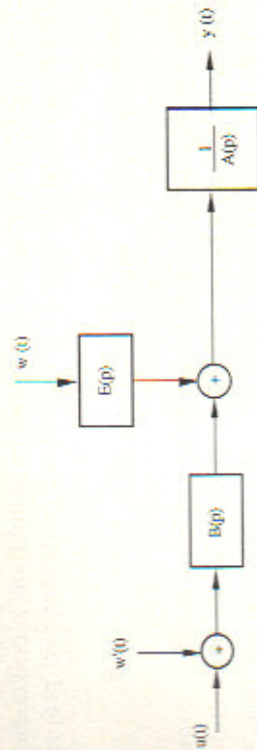


Figure 6. — Système à régler muni du bruit blanc fictif $w'(t)$

La densité spectrale du bruit $(B(p)w'(t) + E(p)w(t))$ est égale à :

$$E(p)\tilde{E}(p)\Phi_w + B(p)\tilde{B}\Phi_w$$

où Φ_w désigne la densité spectrale de w .

D'après la théorie de factorisation spectrale, l'effet des deux bruits blancs gaussiens w et w' peut donc être représenté par l'effet d'un seul bruit blanc gaussien w'' suivant le schéma de la figure 7.

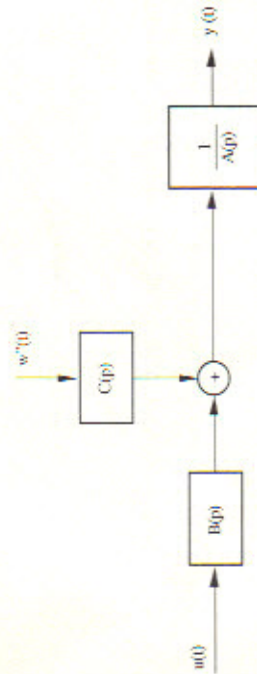


Figure 7. — Schéma équivalent au schéma de la figure 6.

Le polynôme $C(p)$ est alors défini par les propriétés suivantes :

- i) $C(p)$ est α -stable et normalisé
- ii) $(1 + \varepsilon_0)C(p)\tilde{C}(p) = E(p)\tilde{E}(p) + \mu_0^{-1}B(p)\tilde{B}(p)$ (5.8)

avec :

$$\mu_0 = \Phi_w / \Phi_{w'} \quad (5.9)$$

L'équation (5.8), (ii) a la même forme que l'équation (3.13) (théorème de dualité entre commande optimale LQ et filtrage optimal).

i) **Premier cas :** $\mu_0 \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire $\Phi_w \rightarrow 0$).
On retrouve alors la solution optimale (4.24) (filtrage optimal du bruit).

ii) **Deuxième cas :** $\mu_0 \rightarrow 0$ (c'est-à-dire $\Phi_{w'} \rightarrow \infty$).
Considérons alors les zéros de $C(p)$. Leur nombre est égal à $n_E \geq n_A - 1 \geq n_B$.

— Dans le second nombre de (5.8), le terme $\mu_0^{-1}B(p)\tilde{B}(p)$ devient prépondérant. Par conséquent, n_B zéros de $C(p)$ tendent vers les zéros de $B(p)$.

- Les $m = n_E - n_B$ zéros restants :
 - dans le cas continu, tendent vers l'infini (c'est-à-dire deviennent infiniment rapides),
 - dans le cas discret, tendent vers 0 (représentation en q) ou $-1/T$ (représentation en δ).

a) Considérons d'abord le cas continu examiné par Doyle.

D'après ce qui précède, pour $\mu_0 \rightarrow 0$ on a l'équivalence suivante :

$$C(s) \sim \lambda \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) B(s) \triangleq \lambda F(s) B(s) \quad (5.10)$$

où les τ_i sont des nombres (éventuellement complexes) convergeant vers 0 avec $\text{Re}(\tau_i) > 0$, et où λ est un coefficient tel que le polynôme $C(s)$ soit normalisé. Le filtre $1/F(s)$ tend vers l'unité quand $\mu_0 \rightarrow 0$.

Par passage à la limite, $C(s)$ prend donc la forme (5.6), et le régulateur R/S défini par la condition de degré (4.21) et l'équation de Bezout (4.18), (4.19) (c'est-à-dire le régulateur LQG pour le système fictif de la figure 6) réalise donc la RTB (*). Ce régulateur a par conséquent les deux propriétés suivantes :

- $\forall \mu_0 \rightarrow 0$, il est propre et « α -stabilise » le système nominal,
- pour $\mu_0 \rightarrow 0$, il réalise la RTB, c'est-à-dire qu'il retrouve les propriétés de robustesse (3.19).

(*) La démonstration complète de ce résultat figure en annexe.

b) Considérons à présent le cas discret. On obtient cette fois, pour $\mu_0 \rightarrow 0$:

$$C(q) \sim \lambda q^m B(q),$$

ou, si l'on prend une représentation en δ :

$$C(\delta) \sim \lambda(1 + T\delta)^m B(\delta).$$

D'un point de vue formel, on est ici dans une situation semblable à celle du temps continu en posant :

$$F(\delta) = (1 + T\delta)^m.$$

La différence réside dans le fait que les zéros de $F(\delta)$ sont égaux à $-\frac{1}{T}$, et ne tendent donc pas vers l'infini.

Par conséquent, pour T fixée, le filtre $\frac{1}{F(\delta)}$ ne tend pas vers le filtre unitaire (il est égal au retard q^{-m}).

Le RTB ne peut donc avoir lieu pour T fixée > 0 .

En revanche, il est clair que, pour $T \rightarrow 0$, le filtre $\frac{1}{F(\delta)}$ tend vers le filtre unitaire. On retrouve donc alors la situation du temps continu. D'où la conclusion suivante :

Dans le cas discret, le régulateur optimal LQG pour le système fictif de la figure 6 a les deux propriétés suivantes :

- $\forall \mu_0 > 0, \forall T > 0$, il est propre et α -stabilise le système nominal,
- pour $\mu_0 \rightarrow 0$ et $T \rightarrow 0$, il réalise de plus la RTB, c'est-à-dire qu'il retrouve les propriétés de robustesse (3.19).

Ce résultat avait été démontré dans une approche utilisant la représentation d'état par (Maciejowski, 1985).

On remarque que la condition $T \rightarrow 0$ intervient à deux endroits :

- 1) Au niveau de la robustesse du régulateur LQ à retour d'état complet (pour avoir $\epsilon_c = 0$, c'est-à-dire $a \approx 1$).
- 2) au niveau de la RTB.

5.3. CAS D'UN SYSTÈME A NON MINIMUM DE PHASE (C'EST-A-DIRE B NON α -STABLE)

Pour ne pas alourdir l'exposé, on se restreindra dans ce paragraphe au cas continu. Bien entendu, les conclusions s'étendent au cas discret en faisant tendre la période d'échantillonnage vers 0.

Dans le cas d'un système à non minimum de phase, l'équivalence (5.10) cesse d'être vérifiée, puisque $B(s)$ n'est plus un polynôme α -stable. Elle est remplacée par :

$$C(s) \sim \lambda_i \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) B^*(s) = \lambda F(s) B^*(s),$$

où $m \triangleq n_E - n_B$.

Soit η le signe de $B^*(0)/B(0)$. On peut écrire la fonction de transfert du système à régler sous la forme :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\eta B^*(s)}{A(s)} \frac{\eta B(s)}{B^*(s)}.$$

La fonction de transfert $G(s) = \eta B(s)/B^*(s)$ est celle d'un filtre passe-tout (c'est-à-dire $|G(-\alpha + i\omega)| = 1$) et son écart par rapport à l'unité peut être traité comme une erreur de modèle multiplicative. En effet, on peut considérer que :

- le modèle du système a pour fonction de transfert $\eta B^*/A$,
- le système réel a pour fonction de transfert B/A .

L'erreur de modèle $|G(s) - 1|$ est faible aux fréquences auxquelles les zéros instables ne sont pas excités.

Exemple : Soit un système ayant un zéro instable z (on suppose $\alpha = 0$). On a alors :

$$G(s) = \frac{z - s}{z + s},$$

d'où

$$|G(i\omega) - 1| = \frac{2\omega}{|z| \left| 1 + \frac{i\omega}{z} \right|}$$

On a donc :

$$|G(i\omega) - 1| \ll 1 \text{ pour } \omega \ll \frac{|z|}{2}.$$

En reprenant le raisonnement effectué dans l'annexe 2, tout en prenant en compte la fonction de transfert supplémentaire $G(s)$, on déduit de ce qui précède que :

La RTB a lieu avec une bonne précision, si les zéros instables du système à régler se situent en fréquence en dehors de la bande passante du système contrôlé à retour d'état complet.

Cette remarque reprend les conclusions de Stein et Athans (1987) et Zhang et Freudenberg (1987).

5.4. EXEMPLES

a) Influence de la période d'échantillonnage

Soit le système doublement intégrateur, d'équation :

$$y(t) = \frac{1}{s^2} u(t). \quad (5.11)$$

On applique à ce système une commande LQG/RTB à temps discret avec $\alpha = 0$, $\mu_c = 1$ et $\mu_0 = 10^{-6}$. La très faible valeur de μ_0 assure que la convergence par rapport à μ_0 a pratiquement été réalisée.

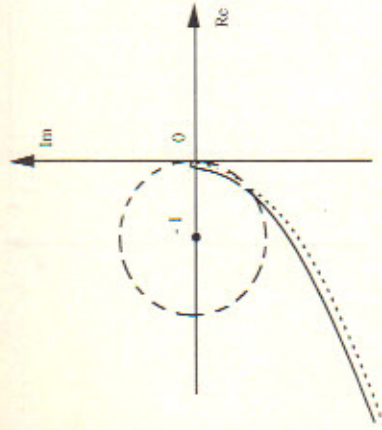
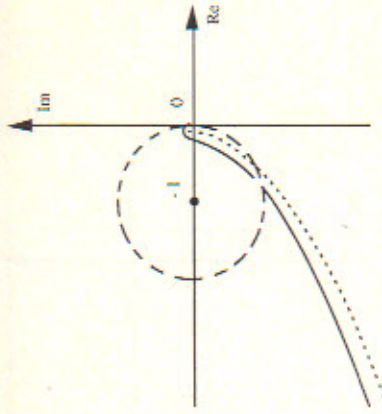
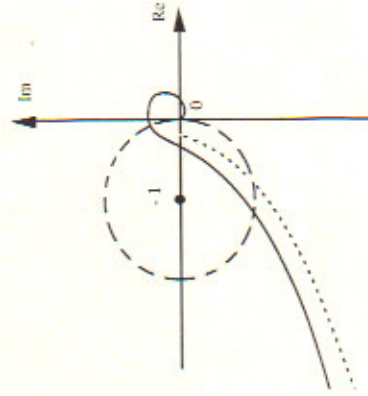
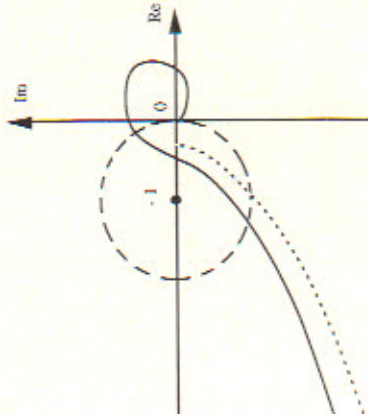
La commande est calculée à partir du modèle à temps discret, obtenu par discrétisation exacte avec bloqueur d'ordre zéro du système (5.11). Sur les figures 8 à 11 sont représentés les lieux de Nyquist de la boucle ouverte pour une période d'échantillonnage variant de 0,01 à 0,45. La courbe en traits pointillés correspond au retour d'état partiel (commande LQ); la courbe en trait continu correspond à la commande LQG/RTB. On constate que plus la période d'échantillonnage augmente, plus le lieu de Nyquist correspondant à la commande LQ pénètre à l'intérieur du cercle de centre -1 et de rayon 1 (également représenté en traits pointillés); ceci est dû au fait que ε_c augmente. D'autre part, le lieu de Nyquist correspondant à la commande LQG/LTR s'écarte de plus en plus du lieu ci-dessus, avec une dégradation de la robustesse. Ceci est tout à fait conforme à la théorie. On remarque l'enroulement du lieu autour de l'origine, qui est dû à l'importance croissante du retard.

b) Effet d'un zéro instable

Considérons à présent le système d'équation :

$$y(t) = \frac{1 - 0,3s}{s(1+s)(1+2s)} u(t).$$

La commande $u(t)$ à temps continu est calculée par la méthode LQG/RTB avec $\alpha = 0$, $\mu_0 = 10^{-5}$ et μ_c variant de 10^2 à 10^{-4} . Plus μ_c diminue, plus le système en boucle fermée est rapide. Les lieux de Nyquist obtenus pour la boucle ouverte sont représentés sur les figures 12 à 15. On constate que pour $\mu_c = 10^2$, le lieu de Nyquist ne pénètre pratiquement pas à l'intérieur du cercle de centre -1 et de rayon 1; en effet, le zéro instable n'est pas excité. La distance du lieu de Nyquist au point -1 diminue en même temps que μ_c , jusqu'à devenir très faible pour $\mu_c = 10^{-4}$. On note la déformation de la courbe due à l'excitation du zéro instable.

Figure 8. — $T = 0,01$.Figure 9. — $T = 0,1$.Figure 10. — $T = 0,3$.Figure 11. — $T = 0,45$.

Influence de la période d'échantillonnage.

c) Compromis entre RTB et sensibilité au bruit

Considérons le système d'équation (4.22) :

$$A(s)y(t) = B(s)u(t) + E(s)w(t)$$

avec $A(s) = s(s+1)$, $B(s) = 1$, $E(s) = A(s)$ (bruit de mesure), et où la densité spectrale du bruit blanc w est égale à 0,1.

La méthode LQG/RTB est appliquée. De manière à obtenir une

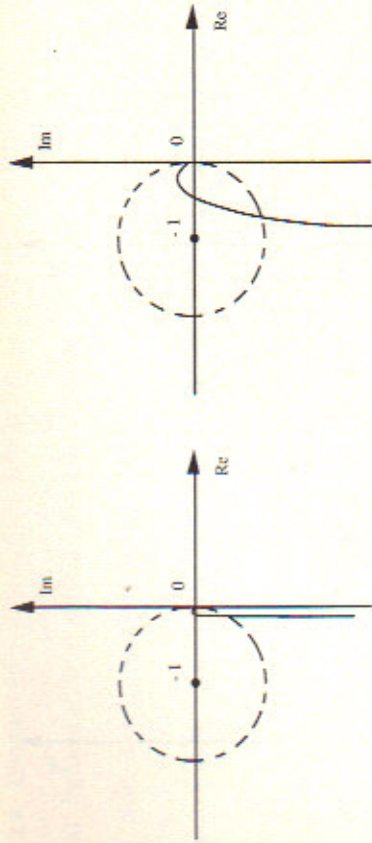


Figure 12. — $\mu_c = 10^2$.

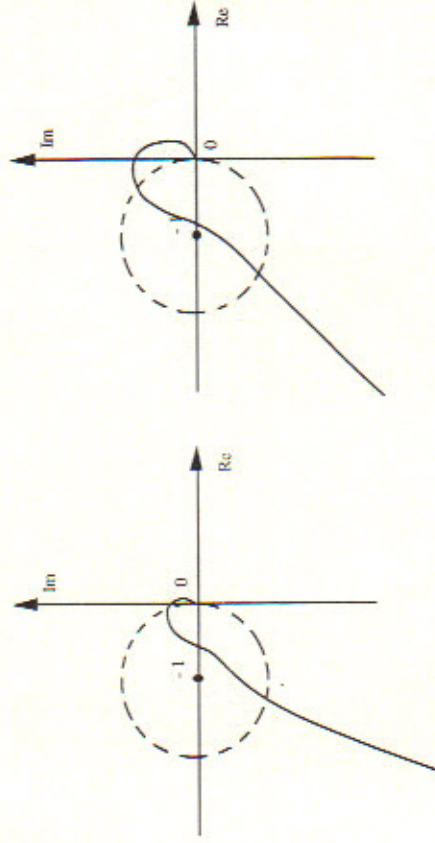


Figure 14. — $\mu_c = 10^{-2}$.

Effet d'un zéro instable.

régulation sans erreur statique, le signal $u^*(t)$ est défini par :

$$u^*(t) = \frac{R(0)}{C(0)} y_c(t)$$

où $y_c(t)$ est le signal de consigne (voir section 6).

Cas n° 1 : $\mu_c = 0,1, \mu_0 = 10$

Le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée sur la figure 16. Ce lieu pénètre dans le disque de centre

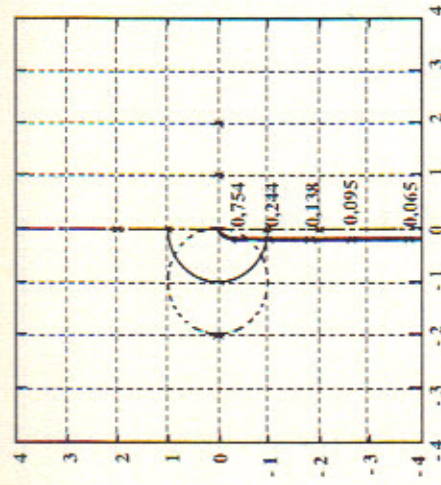


Figure 16. — Lieu de Nyquist avec $\mu_c = 0,1, \mu_0 = 10$.

- 1 et de rayon 1, et ceci prouve que la RTB n'est pas réalisée. La marge de gain-phase MGP est égale à 0,84, la marge de phase MP est égale à $78,3^\circ$, la marge de retard MR enfin est égale à 5,43 unités de temps (u.t.). La réponse indicielle du système contrôlé est représentée sur la figure 17, et la commande correspondante sur la figure 18. Cette commande est peu sensible au bruit.

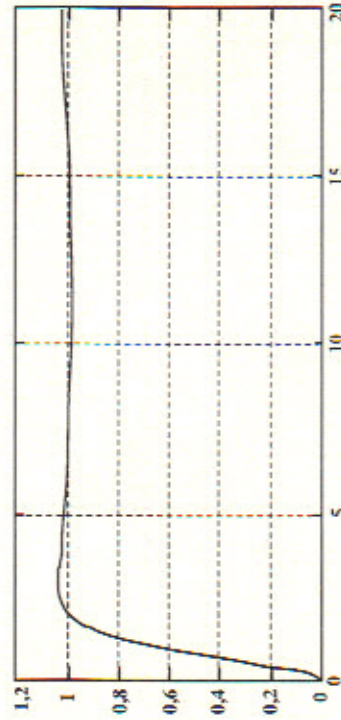
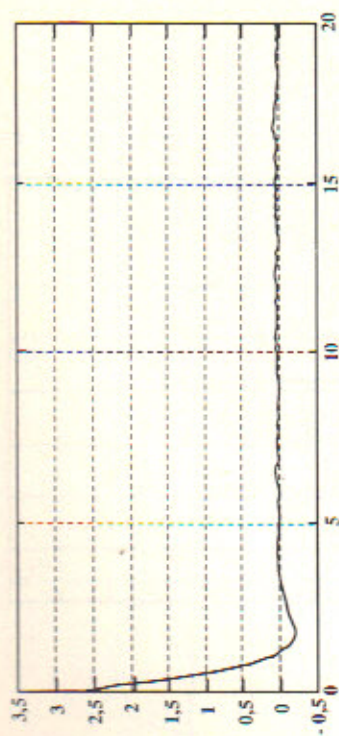
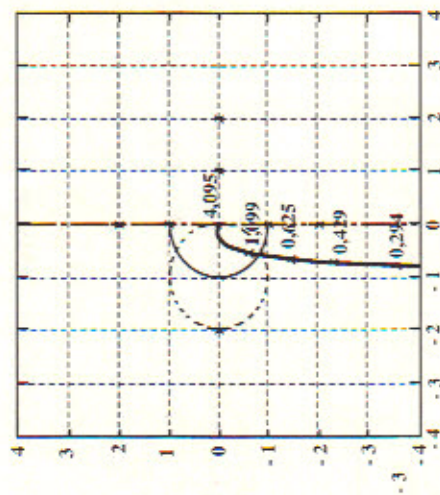
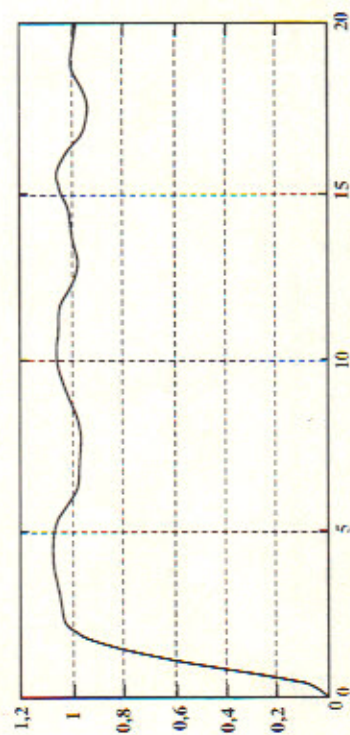


Figure 17. — Réponse indicielle $\mu_c = 0,1, \mu_0 = 10$.

Cas n° 2 : $\mu_c = 0,1, \mu_0 = 0,1$

Le lieu de Nyquist correspondant est représenté sur la figure 19 ; il pénètre largement dans le disque de centre - 1 et de rayon 1.

On a $MGP = 0,65, MP = 56^\circ, MR = 1,01$ u.t. La réponse indicielle du système contrôlé est représentée sur la figure 20, et la commande correspon-

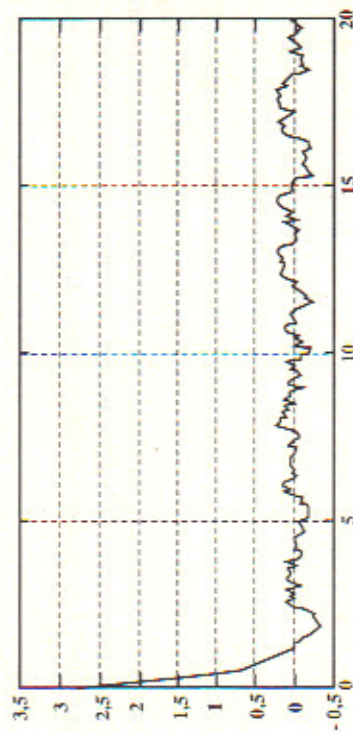
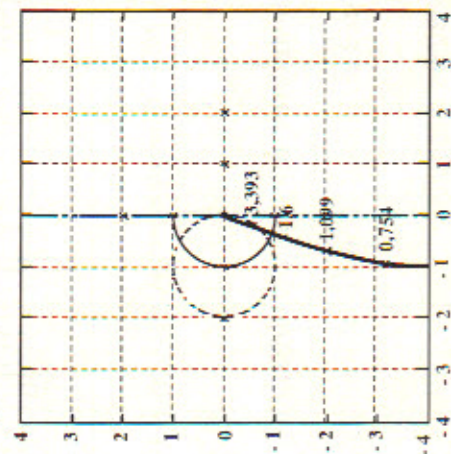
Figure 18. — Commande avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 10$.Figure 19. — Lieu de Nyquist avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 0,1$.Figure 20. — Réponse indicielle avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 0,1$.

dante sur la figure 21. Cette commande est beaucoup plus sensible au bruit, et la sortie également.

Cas n° 3 : $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 10^{-6}$

Le lieu de Nyquist correspondant est représenté sur la figure 22. Il contourne pratiquement le disque de centre -1 et de rayon 1 , ce qui prouve que la RTB est presque réalisée. On a $MGP = 0,93$ $MP = 69,8^\circ$, $MR = 0,62$ u.t.

La réponse indicielle du système contrôlé est représentée sur la figure 22, et la commande correspondante sur la figure 23. La commande est extrêmement sensible au bruit.

Figure 21. — Commande avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 0,1$.Figure 22. — Lieu de Nyquist avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 10^{-6}$.

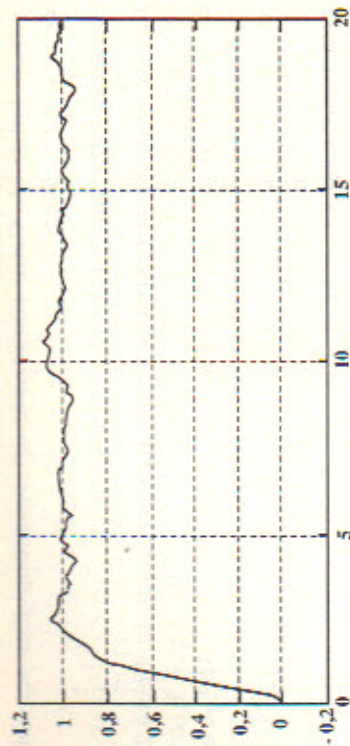


Figure 23. — Réponse indicielle avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 10^{-6}$.

Il est à noter que la meilleure marge de gain-phase a été obtenue dans le cas n° 3 (et ceci correspond au fait que la RTB a été mise en œuvre), mais la marge de retard correspondante est la moins bonne, car la dynamique de l'observateur devient très rapide.

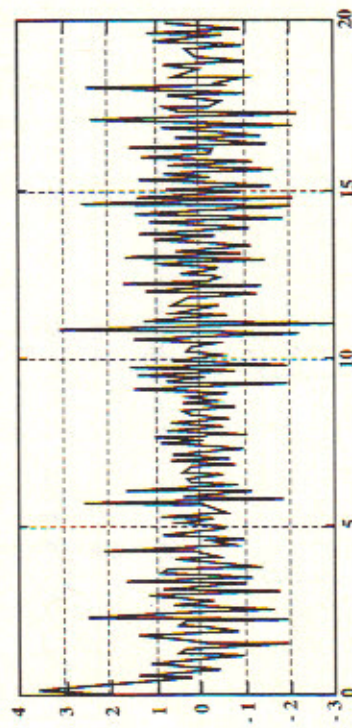


Figure 24. — Commande avec $\mu_c = 0,1$, $\mu_0 = 10^{-6}$.

6. Poursuite robuste avec rejet de perturbation

6.1. Principe du Modèle Interne (Francis et Wonham, 1976 ; Francis, 1977)

Considérons le système d'équation :

$$A(p) y(t) = B(p) u(t) + d(t) \tag{6.1}$$

où $d(t)$ est une perturbation déterministe non mesurée, satisfaisant à la relation :

$$D_1(p) d(t) = 0. \tag{6.2}$$

Dans le cas, par exemple, où $d(t)$ serait une perturbation constante, on aurait $D_1(s) = s$ (cas continu), ou $D_1(q) = q - 1$, ou $D_1(\delta) = \delta$ (cas discret).

Le but de l'asservissement est de réguler à zéro l'erreur de poursuite :

$$e(t) \triangleq y(t) - y_c(t) \tag{6.3}$$

où $y_c(t)$ est un signal de consigne, satisfaisant à la relation :

$$D_2(p) y_c(t) = 0. \tag{6.4}$$

Prenons pour la commande la loi linéaire stationnaire la plus générale possible :

$$S(p) u(t) = -R(p) y(t) + T(p) y_c(t). \tag{6.5a}$$

Pour rendre propre cette expression, on est amené à la filtrer par un dénominateur convenable $F(p)$, soit :

$$\frac{S(p)}{F(p)} u(t) = -\frac{R(p)}{F(p)} y(t) + \frac{T(p)}{F(p)} y_c(t) \tag{6.5b}$$

(voir fig. 25).

On obtient d'après (6.1), (6.3), (6.5) :

$$e(t) = \frac{S}{AS + BR} d(t) + \frac{B(T - R) - AS}{AS + BR} y_c(t). \tag{6.6}$$

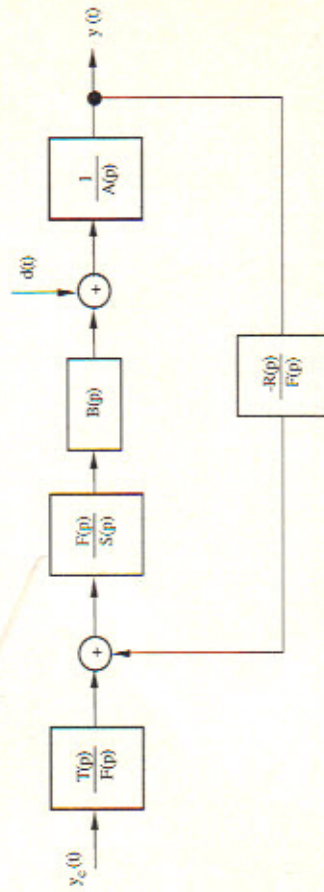


Figure 25. — Système (6.1) asservi par la commande (6.5b).

L'objectif de la régulation est réalisé si et seulement si $e(t) = 0$, $\forall t$. Ceci équivaut aux deux conditions :

$$Sd = 0 \quad (6.7)$$

$$[B(T - R) - AS] y_c = 0. \quad (6.8)$$

La condition (6.7) est vérifiée pour toute perturbation d vérifiant (6.2) si et seulement si :

$$D_1 \text{ divise } S. \quad (6.9)$$

D'autre part, la poursuite de la consigne doit être réalisée de façon robuste, c'est-à-dire même si les polynômes A et B sont mal connus ou varient. Autrement dit, la condition (6.8) doit être vérifiée pour tous polynômes A et B dont le vecteur des coefficients appartient à un certain ouvert. Ceci équivaut à :

$$S y_c = 0$$

$$(T - R) y_c = 0.$$

Ces deux conditions sont vérifiées pour tout signal de consigne y_c vérifiant (6.4) si et seulement si :

$$D_2 \text{ divise } S. \quad (6.10)$$

$$D_2 \text{ divise } T - R. \quad (6.11)$$

Soit D le plus petit commun multiple de D_1 et D_2 ; les conditions (6.9) et (6.10) équivalent à ce que D divise S , c'est-à-dire, il existe un polynôme S_f tel que :

$$S = S_f D. \quad (6.12)$$

D'autre part, la condition (6.11) revient à dire que des polynômes T et R ont même reste de division par D_2 , ce qu'on peut symboliser par :

$$T \sim R \text{ modulo } D_2. \quad (6.13)$$

Exemple : Supposons que $D_2(s) = s^j$, et posons :

$$R(s) = r_0 + r_1 s + \dots + r_{n_R} s^{n_R}$$

$$T(s) = t_0 + t_1 s + \dots + t_{n_T} s^{n_T}.$$

Alors, la condition (6.13) est vérifiée si et seulement si :

$$t_i = r_i, \quad 0 \leq i \leq j - 1.$$

6.2. CONCEPTION D'UNE BOUCLE ROBUSTE PAR LQG/RTB

Les conditions algébriques (6.12), (6.13) assurent la réalisation de la poursuite robuste de la consigne y_c à condition que la boucle fermée soit stable. Il reste donc maintenant à choisir les polynômes S_f (vérifiant (6.12)) et R de façon à assurer la robustesse de la boucle fermée.

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est :

$$\begin{aligned} A_{bf} &= AS + BR = ADS_f + BR \\ &= A_f S_f + BR \end{aligned} \quad (6.14)$$

avec $A_f = AD$. (6.15)

Il existe un polynôme α -stable A_{bf} tel que l'équation de Bezout (6.14) admette une solution (S_f, R) si et seulement si :

$$(A_f, B) \text{ est } \alpha\text{-stabilisable}. \quad (6.16)$$

On supposera dans tout ce qui suit que cette condition est vérifiée et que A_{bf} est telle qu'une solution existe ; cela revient à dire que si A_f et B ont un facteur commun α -stable, ce polynôme est un diviseur de A_{bf} .

Un régulateur n'est admissible que s'il est propre, autrement dit s'il vérifie la condition :

$$\begin{aligned} n_R &\leq n_S \\ \Leftrightarrow n_R &\leq n_{S_f} + n_D. \end{aligned} \quad (6.17)$$

On sait que si (R_0, S_{f_0}) désigne une solution de l'équation de Bezout (6.14), toutes les autres solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned} R &= R_0 - A_f V \\ S_f &= S_{f_0} + BV \end{aligned}$$

où V parcourt l'ensemble des polynômes. Il existe donc une solution unique (R, S_f) à l'équation (6.14) vérifiant la condition :

$$\begin{aligned} n_R &\leq n_{A_f} - 1 \\ \Leftrightarrow n_R &\leq n_A + n_D - 1. \end{aligned} \quad (6.18)$$

La condition (6.17) est alors vérifiée si :

$$n_{S_f} \geq n_A - 1. \quad (6.19)$$

Or, on a :

$$A_f S_f = A_{bf} - BR$$

avec $n_B \leq n_A - 1$, d'où en utilisant (6.18) :

$$n_{S_f} \leq \max \{n_{A_f} - n_A - n_D, n_A - 2\}.$$

La condition (6.19) est donc vérifiée si et seulement si :

$$\begin{aligned} n_{A_f} - n_A - n_D &\geq n_A - 1 \\ \Leftrightarrow n_{A_f} &\geq 2n_A + n_D - 1. \end{aligned}$$

On peut donc poser (comme en (4.19)) :

$$\begin{array}{l} I_{n_f} = PC \\ \text{avec} \\ n_P = n_A + n_D \\ n_C \geq n_A - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (6.20) \\ (6.21) \end{array}$$

Revenons maintenant à l'équation (6.1), et multiplions-la par le polynôme $D(p)$; on obtient :

$$A_f(p) y(t) = B(p) u_f(t) \quad (6.22)$$

où :

$$u_f(t) = D(p) u(t). \quad (6.23)$$

Le problème envisagé dans ce paragraphe équivaut à celui du choix d'une commande :

$$S_f(p) u_f(t) = -R(p) y(t) \quad (6.24)$$

régulant de façon robuste le système (6.22). Les principes développés aux paragraphes 3 et 4 peuvent donc être appliqués :

— le polynôme P est choisi par la méthode linéaire quadratique, c'est-à-dire :

$$(1 + \varepsilon_c) P \tilde{P} = A_f \tilde{A}_f + \mu_c^{-1} B \tilde{B} \quad (6.25)$$

— le polynôme C est choisi de façon à réaliser la RTB, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} (1 + \varepsilon_0) C \tilde{C} = E \tilde{E} + \mu_0^{-1} B \tilde{B} \\ \mu_0 \rightarrow 0 \end{array} \quad (6.26)$$

Pour que C vérifie la condition (6.20), le polynôme E doit satisfaire la condition :

$$n_E \geq n_A - 1 \quad (6.27)$$

Il est à noter que la condition (6.27) ne suffit pas à rendre propre le régulateur (6.24) du système (6.22). Mais il n'y aurait aucune raison à satisfaire cette condition, car seul doit être propre le régulateur du système réel.

6.3. APPLICATION : PID CONÇU PAR MÉTHODE LQG/LTR POLYNOMIALE

Supposons que le système à régler soit du second ordre, i.e. :

$$A(s) = s^2 + a_1 s + a_2, \quad B(s) = b_1 s + b_2$$

et que $D_1(s) = D_2(s) = s$ (cas d'une consigne et d'une perturbation constantes). D'après (6.12), on a donc :

$$S_f(s) = S_f(s) s.$$

En choisissant pour $R(s)$ et $S_f(s)$ des polynômes de degrés minimaux, on a d'après (6.18) et (6.19) :

$$n_{S_f} = 1, \quad n_R = 2$$

d'où finalement :

$$\frac{R(s)}{S_f(s)} = \frac{r_0 s^2 + r_1 s + r_2}{s^2 + s_1 s} \triangleq H(s).$$

La fraction rationnelle $H(s)$ peut être mise sous la forme traditionnelle :

$$H(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{N}{D} s} \right).$$

Les polynômes $R(s)$ et $S_f(s)$ sont déterminés par résolution de l'équation de Bezout :

$$A_f(s) S_f(s) + B(s) R(s) = P(s) C(s).$$

D'après (6.21), on a $n_C = 1$. On obtient l'effet LTR en choisissant $C(s)$ de la manière suivante :

- si $b_1 = 0$: $C(s) = s + \frac{1}{\tau}$, où τ est une constante de temps suffisamment faible,
- si $b_1 \neq 0$: $C(s) = \frac{1}{b_1} B^*(s)$.

Cette méthode de détermination du PID peut s'appliquer à tous les systèmes pouvant être représentés, dans la bande passante où l'on souhaite les commander, par un modèle du second ordre.

Exemple : Considérons le système du troisième ordre ayant pour fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1 - 0,1s}{(1 + 0,5s)(1 + s)(1 + 0,1s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Ce système peut être approximé valablement par un modèle du second ordre dans la bande passante [0, 10]. Une manière efficace de réaliser cette réduction d'ordre consiste à déterminer la fonction de transfert du second ordre $G_r(s)$ qui minimise dans l'espace de Hardy H^∞ le critère :

$$\|(G - G_r)W\|_\infty$$

où $W(s)$ est la pondération fréquentielle donnée par :

$$W(s) = \frac{1}{1 + 0,1s}$$

En utilisant l'algorithme de Enns (1984), on obtient la solution sous-optimale :

$$G_r(s) = \frac{1 - 0,14s}{(1 + 0,7s)(1 + 0,85s)} = \frac{B_r(s)}{A_r(s)}$$

Le polynôme $P(s)$ est le polynôme α -stable vérifiant l'équation de factorisation spectrale :

$$P(s)P(-2\alpha - s) = A_r(s)A_r(-2\alpha - s) + \frac{1}{\mu_c} B_r(s)B_r(-2\alpha - s)$$

avec $A_r(s) = sA_r(s)$.

Les paramètres α et μ_c sont à choisir. La meilleure facilité de réglage et les pôles les mieux amortis sont obtenus avec $\mu_c \rightarrow \infty$. On a alors $\alpha = \omega_0$ (où ω_0 est la pulsation qu'on souhaite obtenir au gain unité).

D'autre part, d'après ce qui précède, le polynôme $C(s)$ donnant le meilleur effet LTR a pour expression :

$$C(s) = \frac{1}{b_1} B^*(s) = s + 0,14$$

Pour $\mu_c = 10^6$ et $\alpha = 2$, on obtient (en appliquant la méthode ci-dessus au modèle du second ordre) :

$$\frac{R(s)}{S(s)} = \frac{16s^2 + 46,2s + 34}{s^2 + 14,3s}$$

d'où $K = 3,1$, $T_i = 1,3$, $T_d = 0,3$, $N = 4,2$.

La réponse indiciale du système du 3^e ordre muni de ce régulateur (avec $T = R$, i.e. le régulateur étant à un élément) est représentée sur la figure 26, et le lieu de Nyquist de la boucle ouverte est représenté sur la figure 27. On constate les excellentes propriétés de ce régulateur PID, tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel.

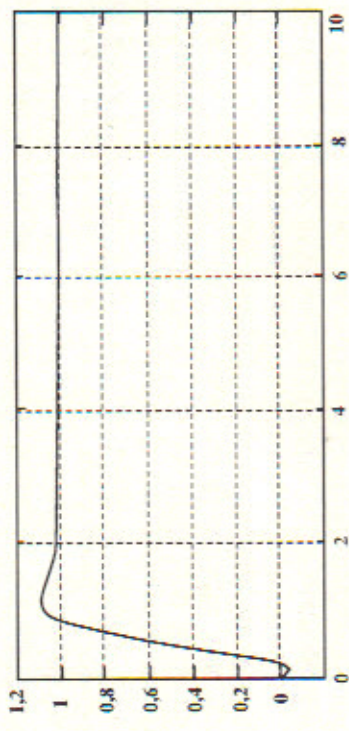
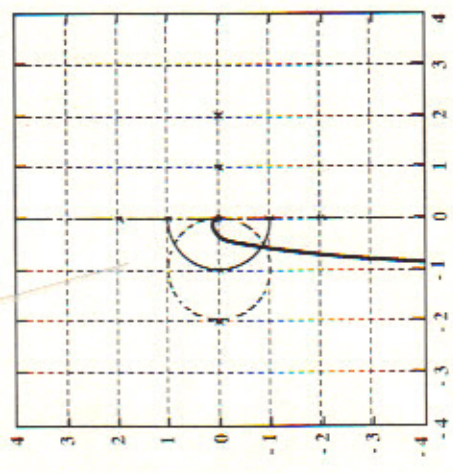


Figure 26. — Réponse indiciale : PID calculé par LQG/LTR appliqué au système du 3^e ordre.



M.R. : 0,46 u.t.
M.P. : 57° à 2,1276 rad/u.t.
M.G. : 10,2 db à 6,5179 rad/u.t.

Figure 27. — Lieu de Nyquist : PID calculé par LQG/LTR appliqué au système du 3^e ordre.

7. Conclusion

Dans cet article, la méthode LQG/LTR (ou, en français, LQG/RTB) a été présentée d'une façon originale, et, nous l'espérons, pédagogique. En effet, l'approche polynomiale est particulièrement bien adaptée pour mettre en évidence la problématique de simplification des zéros du système (voir fig. 5), qui est au cœur de la méthode. Les spécificités du temps discret, et le cas des systèmes à non minimum de phase, ont également pu, grâce à cette approche, être mieux éclairés. La notion de **marge de retard** utilisée dans cet article est essentielle pour le choix des paramètres μ_c (et éventuellement α). Enfin, il a été indiqué la manière de mettre en œuvre la méthode LQG/RTB polynomiale dans le cas où l'on veut réaliser la poursuite robuste d'un signal de consigne avec rejet de perturbation. Une méthode générale de détermination du PID a été indiquée à titre d'application.

L'inconvénient majeur de la méthode LQG/RTB est que lorsqu'on fait tendre μ_0 vers 0, on obtient asymptotiquement un régulateur impropre (sauf cas particulier). Un tel régulateur amplifie considérablement les bruits ayant des composantes dans les hautes fréquences. En réalité, le point à retenir est qu'une bonne robustesse est obtenue pour $\mu_0 \ll$ suffisamment petit », mais il faut bien se garder de passer à la limite. Souvent, on obtient une robustesse satisfaisante pour un μ_0 moyen, et l'on a alors un bon compromis robustesse/sensibilité au bruit.

La procédure LTR est utile quand :

- 1) le régulateur LQG a une marge de gain-phase trop faible ;
- 2) il est possible d'augmenter cette marge de manière significative sans que les constantes de temps de l'observateur deviennent trop faibles, de façon que la sensibilité au bruit ne soit pas trop détériorée.

La marge de retard tend vers celle obtenue avec la commande LQ à retour d'état complet. Si celle-ci donne une marge de retard trop faible, il est possible d'améliorer la situation en restreignant la bande passante grâce au coefficient de pondération de la commande.

Annexe

Démonstration de la RTB pour un système à temps continu et à minimum de phase (§ 5.2)

Le régulateur LQG polynomiale est défini par la condition de degré (4.21) et l'équation de Bezout (4.18), (4.19), où $C(s)$ prend asymptotique-

ment la forme (5.10) quand $\mu_0 \rightarrow 0$. De plus, $F(s) \sim 1$ quand $\mu_0 \rightarrow 0$. Mais puisque $n_C \geq n_A - 1$, le coefficient λ de (5.10) tend vers l'infini. C'est pourquoi un raisonnement algébrique direct sur le comportement asymptotique de la solution (R, S) de (4.18), (4.19) ne peut être effectué.

Considérons alors le régulateur $\frac{R_1}{S_1}$ défini par :

$$\begin{aligned} S_1(s) &= C(s) \\ R_1(s) &= \lambda K(s). \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Ce régulateur est propre pour $\mu_0 \neq 0$ et vérifie la condition de degré (4.21).

Avec les choix ci-dessus, la boucle fermée a la représentation suivante (fig. 28) :

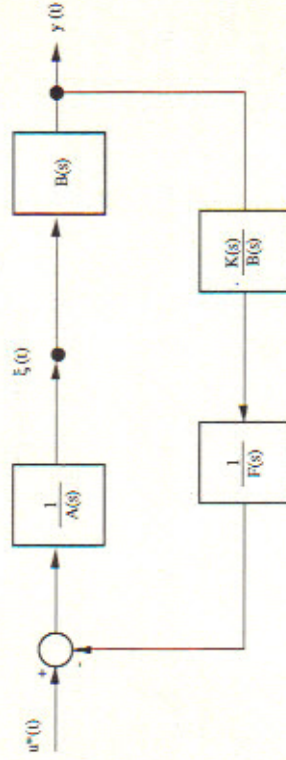


Figure 28. — Boucle fermée correspondant au choix (A2.1).

Pour $\mu_0 \neq 0$, la présence du filtre $\frac{1}{F(s)}$ fait que l'équation de Bezout (4.18), (4.19) n'est pas vérifiée avec un tel régulateur.

En effet on obtient :

$$\begin{aligned} A(s) S_1(s) + B(s) R_1(s) &= B(s) \lambda [P(s) + (F(s) - 1) A(s)] \sim \\ &\sim C(s) \times \left[\frac{P(s)}{F(s)} + \left(1 - \frac{1}{F(s)} \right) A(s) \right]. \end{aligned}$$

Or, on a $\lim_{\mu_0 \rightarrow 0} \frac{1}{F(s)} = 1$, par conséquent le régulateur $\frac{R_1}{S_1}$ vérifie

l'équation de (4.18), (4.19) quand on effectue le passage à la limite.

D'autre part, d'après la figure 28, il est évident que le régulateur $\frac{R_1}{S_1}$ réalise la RTB lorsque $\mu_0 \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque $\frac{1}{F(s)} \rightarrow 1$.

Revenons maintenant au régulateur propre $\frac{R}{S}$ défini de façon unique par l'équation de Bezout (4.18), (4.19) et la condition de degré (4.21). D'après ce qui précède, on a :

$$\lim_{\mu_0 \rightarrow 0} \frac{R(s)}{S(s)} = \lim_{\mu_0 \rightarrow 0} \frac{R_1(s)}{S_1(s)} = \frac{K(s)}{B(s)}.$$

Par conséquent, ce régulateur $\frac{R}{S}$, c'est-à-dire le régulateur optimal LQG pour le système fictif de la figure 6, réalise la RTB lorsque $\mu_0 \rightarrow 0$.

RÉFÉRENCES

- J. C. DOYLE, G. STEIN (1979), *Robustness with observers*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-24, pp. 607-611.
- J. C. DOYLE, G. STEIN (1981), *Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-26, pp. 4-16.
- D. F. ENNS (1984), *Model reduction with balanced realizations : an error bound and a frequency weighted generalization*, IEEE Conf. on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, pp. 127-132.
- B. A. FRANCIS, W. M. WONHAM (1976), *The internal model principle of control theory*, Automatica, vol. 12, pp. 457-465.
- B. A. FRANCIS (1977), *The multivariable servomechanism problem from the input-output viewpoint*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-22, n° 3, pp. 322-328.
- J. M. MACIEJOWSKI (1985), *Asymptotic Recovery for Discrete-Time Systems*, IEEE Trans. Automat. Control, AC-30, n° 6, pp. 602-605.
- G. STEIN, M. ATHANS (1987), *The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design*, IEEE Trans. Automat. Control AC-32, pp. 105-114.
- Z. ZHANG, J. S. FREUDENBERG (1987), *Loop transfer recovery with non-minimum phase zeros*, Proc. 28^e CDC, Los Angeles, pp. 956-957.