

MARGES DE STABILITÉ ET ROBUSTESSE STRUCTURELLE GÉNÉRALISÉES DES RÉGULATEURS LINÉAIRES-QUADRATIQUES MULTIVARIABLES (*)

PAR H. BOURLÈS ET O. L. MERCIER (1)

présenté par P. BERNHARD

Résumé. — Les propriétés classiques, étendues au cas multivariable, de marge de gain, marge de phase et tolérance de réduction de gain des régulateurs « linéaires-quadratiques », sont généralisées dans cet article. Le concept de marge de stabilité introduit à cette occasion permet de distinguer les perturbations multiplicatives affectant la chaîne de mesure de celles affectant la chaîne de commande. La façon dont il convient de choisir les matrices de pondération de l'indice de performance pour maximiser ces différentes marges est indiquée. Il est montré que le système contrôlé conserve une robustesse structurelle si la marge de stabilité du régulateur n'est pas entièrement annulée par les perturbations multiplicatives affectant les chaînes de commande et de mesure. Cette robustesse structurelle est elle-même quantifiée.

Abstract. — Classical properties, extended to the multivariable case, of gain margin, phase margin and gain reduction tolerance of « linear-quadratic » regulators, are generalized in this paper. The novel concept of stability margin, introduced here to this aim, allows distinction of multiplicative perturbations affecting the measurement channel from those affecting the control channel. It is indicated how the penalty matrices in the performance index may be selected to maximize these various margins. It is shown that the controlled system maintains a structural robustness inasmuch as the regulator stability margin is not entirely destroyed by multiplicative perturbations affecting the control and measurement channels. This structural robustness is also quantified.

I. INTRODUCTION

Pour les systèmes linéaires multivariables, la théorie de la commande optimale avec fonction de coût quadratique présente l'intérêt fondamental de permettre de choisir commodément des gains de régulateurs définissant des systèmes contrôlés stables avec de bonnes propriétés temporelles. En effet, le choix des gains multivariables, très laborieux par une approche algébrique directe ou par une approche fréquentielle, est ici remplacé par celui des matrices de pondération de la fonction de coût [1].

(*) Reçu en septembre 1981.

(1) Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques (O.N.E.R.A.), Châtillon, France.

Il ne suffit pas, cependant, d'avoir élaboré un régulateur « linéaire-quadratique » (L.Q.) conférant, en simulation, un bon comportement au « système » en boucle fermée — c'est-à-dire, en fait, à son *modèle mathématique* en boucle fermée — pour être certain d'avoir trouvé un bon régulateur. Un modèle mathématique et une simulation ne sont en effet qu'une idéalisation de la réalité, qui est beaucoup plus complexe. C'est pourquoi un bon régulateur doit avoir la propriété supplémentaire, essentielle, d'être *robuste*.

Le modèle mathématique, décrivant l'évolution de l'état en fonction de la commande, est entaché d'une *erreur de modèle* par rapport au système réel. De plus, le système est situé dans un environnement qui est source de *perturbations extérieures*. Par ailleurs, les organes mécaniques de la chaîne de commande introduisent dans celle-ci des *variations du gain*, des *déphasages* et des *non-linéarités* non modélisées. Enfin, l'état du système devant généralement être reconstruit à partir de mesures, les organes de la chaîne de mesure (capteurs, filtres, etc.) sont la source d'une erreur relative sur l'état (qui s'interprète comme une nouvelle variation du gain), d'autres déphasages et d'autres non-linéarités.

On dit qu'un régulateur possède une *robustesse structurelle* (le problème de la *quantification* des différentes formes de robustesse est pour l'instant omis) si le système contrôlé n'est pas déstabilisé par des erreurs de modèle et des perturbations extérieures d'une certaine classe. On dit d'autre part qu'il possède des *marges de stabilité* (notion qui sera redéfinie plus précisément plus loin) si le système contrôlé n'est pas déstabilisé par certains déphasages, variations du gain et non-linéarités se produisant dans les chaînes de commande ou de mesure.

Il est maintenant bien connu ([2], p. 74) que le régulateur L.Q. *monovariante* possède une *marge de gain infinie*, une *tolérance de réduction de gain* d'au moins 50 %, et une *marge de phase* d'au moins 60°. Plus récemment, il a été démontré [3-5] que ces propriétés pouvaient être étendues sous certaines conditions au cas *multivariante*. Il apparaît en outre [5, 6] que le régulateur L.Q. multivariante possède certaines qualités de *robustesse structurelle*. De plus, il a été montré [5, 6] que la tolérance de réduction de gain du régulateur L.Q. (quand on peut la calculer) d'une part, et sa robustesse structurelle d'autre part, peuvent être augmentées par un choix convenable de l'indice de performance. La corrélation entre ces deux effets n'a cependant pas été établie.

Cet article se propose de généraliser ces différentes propriétés de robustesse et de les relier aux matrices de pondération de l'indice de performance afin de fournir un moyen de les améliorer.

La Section II est consacrée à la formulation du problème ; la distinction, inutile en monovariante mais essentielle en multivariante, entre les pertur-

bations multiplicatives (englobant variations du gain et déphasages, et représentant des approximations de fonctions de transfert non modélisées) de la chaîne de commande et de la chaîne de mesure, est introduite. Dans la Section III, un théorème général de stabilité, dérivé du Théorème de Lyapunov, et servant de préliminaire aux sections suivantes, est établi. Dans la Section IV sont quantifiées diverses *marges de stabilité* (dans une acception étendue et précisée) du régulateur L.Q. Ces quantifications généralisent les principaux résultats de [3-5]. La robustesse structurelle du régulateur L.Q., en présence de perturbations multiplicatives, est quantifiée dans la Section V. Les propriétés établies dans [6] sont alors généralisées. La Section VI est réservée à la conclusion.

Les principaux résultats de cet article ont déjà été brièvement énoncés dans [7].

Notations

- $\mathbb{F}^{n \times m}$: Ensemble des matrices de dimension $n \times m$, à éléments appartenant à \mathbb{F} ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), identifié, pour des bases données, avec l'ensemble des applications linéaires correspondantes.
- Ker : Noyau ($\text{Ker } K = \{x \mid Kx = 0\}$).
- A^* : Transconjugée ou opérateur adjoint.
- A^T : Transposée (pour A réelle).
- $H > 0, H \geq 0$: Matrice hermitienne définie positive, semi-définie positive.
- $H_1 > H_2, H_1 \geq H_2$: Relations définies sur l'ensemble des matrices hermitiennes d'une dimension donnée par :
- $H_1 > H_2 \Leftrightarrow H_1 - H_2 > 0, H_1 \geq H_2 \Leftrightarrow H_1 - H_2 \geq 0$.
- La relation $H_1 \geq H_2$ est une relation d'ordre.
- $\|x\|$: Norme hermitienne.
- $\|\Lambda\|_s$: Norme spectrale ($\|\Lambda\|_s = \sup [\lambda(\Lambda\Lambda^*)]^{1/2}$).
- $Q^{1/2}$: Racine carrée symétrique de la matrice réelle $Q \geq 0$.
- $A^{\#}$: Pseudo-inverse.
- \mathbb{R}^{+*} : $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

II. FORMULATION DU PROBLÈME

Soit le système linéaire, invariant et stabilisable

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{C}^n$, $u(t) \in \mathbb{C}^m$ pour $t \in [0, +\infty[$.⁽¹⁾

Il est bien connu que la commande qui minimise sous la contrainte (1) la fonction de coût

$$J = \int_0^{+\infty} [x^*(t)Qx(t) + u^*(t)Ru(t)] dt, \quad (2)$$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q > 0$, et $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R > 0$, est stabilisante pour le système (1). Elle est donnée par

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \triangleq Kx(t), \quad (3)$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et où $P > 0$ est solution de l'équation algébrique

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (4)$$

Il sera supposé dans ce qui suit, sans que cela entraîne de perte de généralité, que B est de rang maximum (cela signifie qu'il n'y a pas de commandes redondantes) et que $m \leq n$.

Problème de la robustesse du régulateur

Soient Λ_c une matrice de $\mathbb{C}^{m \times m}$, Λ_M une matrice de $\mathbb{C}^{n \times n}$ et $f(x, t)$ une fonction à valeurs dans \mathbb{C}^n . Les matrices Λ_c et Λ_M représentent des perturbations multiplicatives affectant respectivement la chaîne de commande et la chaîne de mesure, et $f(x, t)$ représente une erreur de modèle additive ou une perturbation extérieure (voir fig. 1).

Le problème de la robustesse du régulateur s'énonce de la façon suivante : Sous quelles conditions portant sur Λ_c , Λ_M et $f(x, t)$ le système perturbé

$$\dot{x}(t) = (A + B\Lambda_c K\Lambda_M)x(t) + f(x(t), t) \quad (5)$$

reste-t-il asymptotiquement stable ?

(1) Il est nécessaire, pour les développements qui suivent, de considérer que l'état et la commande appartiennent à des espaces hermitiens. Bien entendu, la commande et l'état effectuels sont $u_1(t) = R_c(u(t))$ et $x_1(t) = R_c(x(t))$. Le fait de plonger les espaces euclidiens auxquels appartiennent $x_1(t)$ et $u_1(t)$ dans des espaces hermitiens ne change en rien le problème d'optimisation ni la loi de commande finalement obtenue. La façon dont $x(t)$ et $u(t)$ sont définis à partir de $x_1(t)$ et $u_1(t)$ est exposée plus loin.

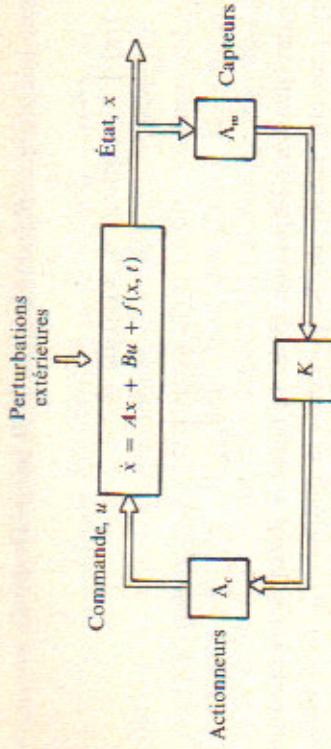


Figure 1. — Schéma-bloc du système perturbé (régulation).

Remarques

1) Signification des matrices complexes Λ_c et Λ_M .

Il a été mentionné que la commande effectivement calculée est $u_1(t) \in \mathbb{R}^m$. Supposons que $u_1(t)$ soit de carré sommable sur $[0, +\infty[$; elle admet donc une transformée de Fourier $\mathcal{U}(\omega)$. Comme $u_1(t) \in \mathbb{R}^m$, on a $\mathcal{U}(-\omega) = \overline{\mathcal{U}(\omega)}$. Supposons qu'il s'introduise dans la chaîne de commande une fonction de transfert $\Lambda_c(\omega) \in \mathbb{C}^{m \times m}$. La commande $v_1(t) \in \mathbb{R}^m$ réellement appliquée au système est donc telle que sa transformée de Fourier $\mathcal{V}(\omega)$ vérifie

$$\mathcal{V}(\omega) = \Lambda_c(\omega)\mathcal{U}(\omega).$$

Comme $v_1(t) \in \mathbb{R}^m$, on a $\mathcal{V}(-\omega) = \overline{\mathcal{V}(\omega)}$, et par conséquent $\Lambda_c(-\omega) = \overline{\Lambda_c(\omega)}$. Supposons que la commande $u_1(t)$ ait un spectre de largeur limitée, c'est-à-dire qu'il existe des fréquences $\omega_{\min} \geq 0$ et $\omega_{\max} \geq 0$ telles que $\mathcal{U}(\omega) = 0$ pour $\omega \geq 0$ et n'appartenant pas à $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, et que, de plus, $\Lambda_c(\omega)$ soit constante et égale à Λ_c pour $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. On a donc $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(\omega) = \Lambda_c \mathcal{U}(\omega)$. Définissons à présent les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ à valeurs dans \mathbb{C}^m par

$$u(t) \triangleq (1/\pi) \int_0^{+\infty} \exp(i\omega t) \mathcal{U}(\omega) d\omega$$

et

$$v(t) = (1/\pi) \int_0^{+\infty} \exp(i\omega t) \mathcal{V}(\omega) d\omega.$$

Il s'ensuit que $u_1(t) = R_c(u(t))$ et $v_1(t) = R_c(v(t))$. De plus,

$$\begin{aligned} v(t) &= (1/\pi) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \exp(i\omega t) \Lambda_c \mathcal{W}(\omega) d\omega = \\ &= \Lambda_c (1/\pi) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \exp(i\omega t) \mathcal{W}(\omega) d\omega = \Lambda_c u(t), \end{aligned}$$

cette égalité justifiant l'équation (5) et la figure 1 puisque un raisonnement similaire peut être fait en ce qui concerne la matrice Λ_M , associée à l'état complexe $x(t)$.

Les perturbations multiplicatives Λ_c et Λ_M s'interprètent donc comme des *approximations de fonctions de transfert non modélisées* s'introduisant dans les chaînes de commande et de mesure.

Toute matrice $\Lambda_c \in \mathbb{C}^{m \times m}$ se factorise selon

$$\Lambda_c = G \exp(i\Phi), \quad \text{où } G \triangleq (\Lambda_c \Lambda_c^*)^{1/2} \geq 0 \quad (6)$$

et où Φ est une matrice hermitienne dont les valeurs propres sont comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ ([8], chapitre 9). Les matrices G et Φ seront appelées le *gain* et le *déphasage* multivariées de la perturbation multiplicative Λ_c .

2) Dans le cas où le système est monovarié, le gain K et la perturbation Λ_M , qui sont scalaires, commentent : il n'y a donc pas lieu de considérer séparément les perturbations multiplicatives affectant la chaîne de commande et la chaîne de mesure. *Cela devient cependant une nécessité dans le cas multivarié.*

III. RECHERCHE DE CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITÉ PAR LA MÉTHODE DE LYAPUNOV

Le système (5) étant non linéaire, la seule méthode générale pour étudier sa stabilité est la méthode de Lyapunov [9]. Cette méthode a déjà été utilisée pour un cas particulier du problème qui vient d'être posé : celui où Λ_c et Λ_M sont la matrice identité [6].

Il est bien connu [9] que la fonctionnelle

$$V(x) \triangleq x^* P x \quad (7)$$

est une fonction de Lyapunov pour le système contrôlé (1, 3) (système non perturbé). En effet :

$$V(x) > 0 \quad \text{si } x \neq 0, \quad (8)$$

$$V(x) \rightarrow +\infty \quad \text{si } \|x\| \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

et l'on montre d'autre part, en dérivant (7) et en utilisant l'équation (4), que

$$\dot{V}(x) \triangleq (\partial V / \partial x) \dot{x} < 0 \quad \text{si } x \neq 0. \quad (10)$$

L'objet de cet article est de donner des conditions portant sur $f(x, t)$, Λ_c et Λ_M pour que la forme hermitienne (7) reste une fonction de Lyapunov pour le système contrôlé (5). Il suffit, pour que (5) soit asymptotiquement stable, que $\forall x \neq 0$, $\dot{V}(x)$ soit négatif. On a tout d'abord le théorème général suivant, encore valable si K n'est pas le gain optimal (c'est-à-dire si

$$K \neq -R^{-1} B^T P);$$

THÉORÈME 1 : Soit

$$D \triangleq -A^T P - PA - PB \Lambda_c K \Lambda_M - \Lambda_M^* K^T \Lambda_c^* B^T P \quad (11)$$

et soit T une matrice inversible arbitraire de $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Une condition suffisante pour que $\dot{V}(x) < 0$ est que, conjointement,

$$D > 0, \quad \text{et, pour } x \neq 0, \quad (T1.1)$$

$$\|T^{-1} f(x, t)\| < \frac{1}{2 \|T^* P T\|_s \| (T^* D T)^{-1} \|_s}. \quad (T1.2)$$

Ce théorème généralise le théorème 1 de Patel et al. [6], où $\Lambda_c = I_m$ et $\Lambda_M = I_n$. Sa démonstration est donnée en Annexe A.

Remarques

1) Des perturbations multiplicatives Λ_c et Λ_M étant données, la condition (T1.1) permet de s'assurer s'il existe des perturbations additives $f(x, t)$ pour lesquelles $\dot{V}(x) < 0$. Une classe de ces perturbations *admissibles* $f(x, t)$ est alors quantifiée par (T1.2). La matrice T de « mise à l'échelle » permet de l'élargir considérablement, par exemple en transformant l'hyperellipsoïde $x^* P x = c$ en une hypersphère $x^* T^* P T x = c$, où c est une constante. Dans un cas particulier, la norme de ces perturbations admissibles a pu, grâce à cette matrice, être multipliée par un facteur 10^6 .

2) Une classe de perturbations multiplicatives admissibles Λ_c et Λ_M (celles pour lesquelles $D > 0$), *indépendante* de $f(x, t)$, a été mise en évidence. Ce fait sera exploité dans la section suivante.

3) Si $\Lambda_c u$ et $\Lambda_M x$ sont remplacés par des fonctions non linéaires $N_c(u)$ et $N_M(x)$ (donc sans mémoire), le théorème 1 s'applique encore à condition

de remplacer l'inégalité (T1.1) par $g(x) > 0$ pour $x \neq 0$, où

$$g(x) = -x^*(A^T P + PA)x + \{N_c[-KN_M(x)]\}^* B^T P x + x^* P B N_c[-KN_M(x)],$$

et l'inégalité (T1.2) par

$$\|T^{-1} f(x, t)\| \|T^{-1} x\| / g(x) < 1 / (2 \|T^* P T\|_s).$$

IV. MARGES DE STABILITÉ

Il est supposé dans cette section que $f(x, t) = 0$. D'après (3) et (5), le système contrôlé est donc défini par

$$\dot{x} = (A + B\Lambda_c K\Lambda_M)x. \quad (12)$$

L'objet de cette Section est de donner, dans le cas où le gain K est obtenu par optimisation linéaire-quadratique, des conditions portant sur Λ_c et Λ_M pour que $D > 0$, c'est-à-dire pour que le système (12) soit globalement asymptotiquement stable. Ces conditions permettront de quantifier diverses marges concernant la stabilité du régulateur L.Q.

Sont tout d'abord données quelques définitions nouvelles qui étendent les notions classiques de marge de phase et de marge de gain. Ces définitions peuvent naturellement s'appliquer à d'autres régulateurs que le régulateur L.Q.

DÉFINITION 1 (Marge de stabilité) : Le régulateur défini par le gain K possède une marge de stabilité $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{n \times n}$ si $\forall (\Lambda_c, \Lambda_M) \in \mathcal{M}$, le système contrôlé (12) est globalement asymptotiquement stable.

Dans le cas où $\Lambda_M = I_n$ (chaîne de mesure parfaite), nous définissons diverses marges par rapport à la chaîne de commande. On définirait de manière tout à fait analogue des marges de même nom par rapport à la chaîne de mesure.

DÉFINITION 2 (Marge de stabilité, marge de gain multivariable, marge de phase multivariable, par rapport à la chaîne de commande) : On considère le cas où $\Lambda_M = I_n$. Le régulateur défini par le gain K possède une marge de stabilité par rapport à la chaîne de commande $\mathcal{M}_c \in \mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{m \times m}$ si $\forall (G, \Phi) \in \mathcal{M}_c$ où G et Φ sont le gain et le déphasage multivariables de Λ_c , le système contrôlé (12) est globalement asymptotiquement stable. Ce régulateur possède une marge de gain multivariable par rapport à la chaîne de commande $\mathcal{M}_G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ (resp., une marge de phase multivariable par rapport à la chaîne de commande $\mathcal{M}_\Phi \in \mathbb{C}^{m \times m}$) si, pour $\Phi = 0$ (resp., pour $G = I_m$), $\forall G \in \mathcal{M}_G$ (resp., $\forall \Phi \in \mathcal{M}_\Phi$), le système contrôlé (12) est globalement asymptotiquement stable.

Du théorème 1 se déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1 (Marge de stabilité du régulateur L.Q.) : Une marge de stabilité \mathcal{M}_1 du régulateur L.Q. est l'ensemble des couples (Λ_c, Λ_M) de $\mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{n \times n}$ pour lesquels D , défini selon (11), est positif défini.

Ce corollaire permet de vérifier a posteriori si le système contrôlé (12), soumis à des perturbations multiplicatives Λ_c et Λ_M données, est globalement asymptotiquement stable.

Une marge de stabilité $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ du régulateur L.Q. est exprimée dans ce qui suit *uniquement* en fonction des matrices Q et R de la fonction de coût (2) et du gain optimal K , ceci mettant en évidence la causalité existant entre le choix des matrices de pondération de l'indice de performance et la capacité du système contrôlé de tolérer, sans être déstabilisé, des perturbations multiplicatives Λ_c et Λ_M .

Soient $R^{-1/2}$ la racine carrée symétrique de R (c'est-à-dire telle que $R = R^{1/2} R^{1/2}$), et les matrices S et Λ , $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Lambda \in \mathbb{C}^{m \times m}$, définies par

$$S \triangleq R^{1/2} K \quad \text{et} \quad \Lambda \triangleq (R^{1/2} \Lambda_c R^{-1/2}) (S \Lambda_M S^*). \quad (13)$$

La matrice Λ représente une « perturbation multiplicative réduite ». Enfin, soient L et H des matrices hermitiennes de $\mathbb{C}^{m \times m}$ telles que

$$\begin{aligned} L &\geq 0 \quad \text{et} \quad Q - S^T L S \geq 0 \\ \text{et} \quad H &\triangleq \Lambda^* + \Lambda - I_m + L. \end{aligned} \quad (14)$$

Une telle matrice L existe ; en effet :

LEMME 1 : La matrice hermitienne $L \in \mathbb{C}^{m \times m}$ maximale (au sens de la relation d'ordre \geq , définie sur l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathbb{C}^{m \times m}$) telle que $Q - S^T L S \geq 0$, est $L_{\max} = (S Q^{-1} S^T)^{-1} > 0$. (Voir annexe B).

Remarque : Compte tenu des hypothèses qui ont été faites ($m \leq n$, B de rang maximum et $Q > 0$), la matrice L_{\max} existe nécessairement.

THÉORÈME 2 (Marge de stabilité du régulateur L.Q.) : Une marge de stabilité $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ du régulateur L.Q. est l'ensemble des couples

$$(\Lambda_c, \Lambda_M) \text{ de } \mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{n \times n}$$

pour lesquels

$$\text{Ker } K \subset \text{Ker } (K\Lambda_M), \quad (T2.1)$$

$$H > 0. \tag{T2.2}$$

Si $(\Lambda_c, \Lambda_M) \in \mathcal{M}_2$, alors il est possible de choisir un réel λ_Δ , $0 < \lambda_\Delta \leq 1$, tel que l'on ait :

$$H - \lambda_\Delta L \triangleq \Lambda_\Delta \geq 0; \tag{T2.3}$$

on a dans ce cas :

$$D \geq \lambda_\Delta Q + S^T \Lambda_\Delta S > 0. \tag{T2.4}$$

Ce théorème est démontré en annexe B.

Remarques

- 1) La relation (T2.1) exprime que, pour que l'inégalité (T2.2) fournisse une garantie de stabilité du système contrôlé (12), la perturbation Λ_M doit être telle que, si une coordonnée de l'état n'intervient pas dans l'élaboration de la commande du système non perturbé, elle ne doit pas intervenir non plus dans celle du système perturbé.
- 2) Un régulateur induit du régulateur L.Q. a été considéré dans la littérature pour ses intéressantes propriétés de marge de gain, marge de phase et tolérance de réduction de gain [10, 11] : il est défini par le gain $K_\beta \triangleq -R^{-1}B^T P_\beta$, où P_β est l'unique solution > 0 de l'équation algébrique

$$A^T P_\beta + P_\beta A - \beta P_\beta B R^{-1} B^T P_\beta + Q = 0, \beta > 0.$$

Le théorème 2 s'applique encore à ce régulateur après remplacement de la condition (T2.2) par $H > (\beta - 1) I_m$ et de l'inégalité (T2.3) par

$$H - (\beta - 1) I_m \geq \lambda_\Delta L + \Lambda_\Delta$$

(démonstration semblable à celle de l'annexe B).

On peut déduire directement du théorème 2 une marge de stabilité, une marge de gain multivariable et une marge de phase multivariable, par rapport à la chaîne de commande (par exemple) du régulateur L.Q. : il suffit de considérer le cas où $\Lambda_M = I_m$, ce qui entraîne $\Lambda = R^{1/2} \Lambda_c R^{-1/2}$. Toutefois, ce sont des *minorants* (au sens de l'inclusion) très importants de ces marges qui vont maintenant être mis en évidence : leur expression est en effet particulièrement simple et ils peuvent être aisément maximisés par un choix adéquat des matrices de pondération Q et R . Un résultat similaire ne semble malheureusement pas pouvoir être obtenu concernant les marges de même nom associées à la chaîne de mesure.

Le théorème suivant découle du théorème 2 pour $L = L_{\max}$.

THÉORÈME 3 (Marge de stabilité, marge de gain multivariable, marge de phase multivariable, par rapport à la chaîne de commande, du régulateur L.Q.) : Une marge de stabilité par rapport à la chaîne de commande du régulateur L.Q. est l'ensemble \mathcal{M}_c , des couples de matrices hermitiennes (G, Φ) de $\mathbb{C}^{m \times m} \times \mathbb{C}^{m \times m}$ pour lesquels, la matrice Λ_c vérifiant (6) étant normale et la matrice R étant alors choisie de telle sorte qu'elle diagonalise dans la même base que Λ_c (si les directions propres de Λ_c sont inconnues, il convient donc de prendre $R = \rho I_m, \rho \in \mathbb{R}^{+*}$; dans le cas contraire, à une rotation près Λ_c est diagonale et R doit seulement être choisie diagonale dans une base de vecteurs propres de Λ_c),

$$G \cos \Phi > (1/2) [I - (R^{1/2} K Q^{-1} K^T R^{1/2})^{-1}]. \tag{T3.1}$$

Une marge de gain \mathcal{M}_{G_1} (resp., une marge de phase \mathcal{M}_{Φ_1}) multivariable, par rapport à la chaîne de commande, du régulateur L.Q., est l'ensemble des matrices hermitiennes G (resp., Φ) de $\mathbb{C}^{m \times m}$ qui diagonalisent dans la même base que R et qui vérifient (T3.1), où $\cos \Phi$ (resp., G) est égal à I_m .

(Voir démonstration en annexe C.)

Remarques

- 1) Ce théorème généralise le théorème 1 de Wong et al. [5] qui énonce que le système contrôlé (12), où $\Lambda_c = I_m$ est globalement asymptotiquement stable pour $\Lambda_M = G$ diagonale et vérifiant (T3.1) (avec $\Phi = 0$), si R est diagonale.

L'inégalité (T3.1) donne la condition pour laquelle un gain multivariable et un déphasage multivariable non modélisés, présents simultanément dans la chaîne de commande, ne déstabilisent pas le système contrôlé. Cette condition est nouvelle, même dans le cas monovariable. Une interprétation géométrique en sera donnée plus loin dans le cas mono-entrée.

- 2) Les directions propres de R étant choisies identiques à celles de la perturbation multiplicative normale Λ_c (ou, quand celles-ci sont inconnues, R étant choisi égal à $\rho I_m, \rho \in \mathbb{R}^{+*}$), le théorème 3 indique la façon dont il convient de choisir les valeurs propres de R et la matrice Q de manière à maximiser les marges $\mathcal{M}_{G_1}, \mathcal{M}_{\Phi_1}$ et \mathcal{M}_{Φ_1} : on cherchera à minimiser

$$\lambda_{\max}(R^{1/2} K Q^{-1} K^T R^{1/2}) \triangleq 1/\rho_0. \tag{15}$$

Cette importante remarque généralise l'observation de Wong et al. [5] selon laquelle la minimisation de cette quantité maximise la tolérance de réduction

tion de gain (au sens classique appelé plus loin) du régulateur L.Q., dans le cas où les matrices Λ_c et R sont toutes deux diagonales.

Il est possible de calculer, par résolution d'équations de Lyapunov, les sensibilités au premier et au deuxième ordre de $1/\lambda_0$ par rapport aux coefficients de Q et de R .

3) Le théorème 3 s'applique aussi au régulateur défini par le gain K_β (voir la remarque 2 suivant le théorème 2) après remplacement de l'inégalité (T3.1) par $G \cos \Phi > (1/2) [\beta I - (R^{1/2} K_\beta Q^{-1} K_\beta^T R^{1/2})^{-1}]$; ceci montre que ce régulateur possède une excellente marge de stabilité par rapport à la chaîne de commande pour β suffisamment petit. Cette relation généralise ou complète des résultats récemment établis ([10], théorème 3; [11]).

Interprétation géométrique (cas mono-entrée)

Une interprétation géométrique du théorème 3 est maintenant donnée dans le cas mono-entrée. Il est bien connu ([2], chapitre 5, p. 74), que le lieu de Nyquist d'un système contrôlé mono-entrée optimal L.Q. reste à l'extérieur du cercle de rayon 1 et de centre $(-1, 0)$; cela est dû à ce que la valeur absolue de la « différence de retour » correspondant à de tels systèmes est supérieure à 1 à toutes les fréquences [12]. Supposons qu'un déphasage φ se produise dans la chaîne de commande, et que le gain soit affecté par un facteur multiplicatif g : l'effet global est la multiplication par $\Lambda_c = g \exp(i\varphi)$. Le lieu de Nyquist subit ainsi la rotation φ et l'homothétie g et reste donc à l'extérieur du cercle défini plus haut, ayant subi la même transformation. Une condition suffisante de stabilité (d'après le Critère de Nyquist) est donc que le point $(-1, 0)$ soit intérieur à ce cercle, c'est-à-dire que $2g \cos \varphi > 1$ (voir fig. 2). Le théorème 3 affaiblit cette condition.

Comme application du théorème 3, sont maintenant mises en évidence des marges au sens classique (marge de gain, marge de phase, tolérance de réduction de gain) du régulateur L.Q.

On considère le système contrôlé (12) où $\Lambda_M = I_r$. Ces marges sont définies dans le cas multivariable de la manière suivante [10]: si le système contrôlé reste globalement asymptotiquement stable quelle que soit la matrice symétrique Λ_c de valeurs propres λ_j telles que $1 \leq \lambda_j \leq g$ (resp. $1 - \tau/100 \leq \lambda_j \leq 1$, $\tau \geq 0$), le régulateur défini par le gain K a une marge de gain g (resp. une tolérance de réduction de gain τ en pourcents); si le système contrôlé reste globalement asymptotiquement stable quelle que soit la matrice unitaire Λ_c de valeurs propres $\lambda_j = \exp(i\varphi_j)$ avec $|\varphi_j| \leq \Delta\varphi$, le régulateur a une marge de phase $\Delta\varphi$.

COROLLAIRE 2: Soit dans la chaîne de commande une perturbation multi-

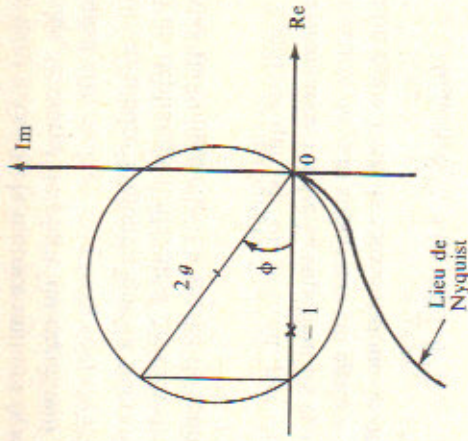


Figure 2. — Interprétation de la condition $2g \cos \varphi > 1$ (cas mono-entrée).

plicative Λ_c non modélisée, Λ_c étant une matrice normale. La matrice de pondération R de l'indice est supposée choisie de telle sorte qu'elle diagonalise dans la même base orthogonale que Λ_c .

Le régulateur L.Q. du système contrôlé (12), où $\Lambda_M = I_m$ possède pour une telle perturbation Λ_c :

- une marge de gain infinie,
- une tolérance de réduction de gain $\tau = 50(1 + \lambda_0)$ (en pourcents), où λ_0 est défini selon (15),
- une marge de phase $\Delta\varphi = \text{Arc cos} [(1 - \lambda_0)/2] > 60^\circ$,
- une « marge généralisée » scalaire caractérisée par

$$\text{Min}_{j \in \{1, \dots, m\}} [g_j \cos \varphi_j] > (1 - \lambda_0)/2$$

où g_j et φ_j sont définis par $\lambda_j \triangleq g_j \exp(i\varphi_j)$, $g_j \geq 0$, $-\pi < \varphi_j \leq +\pi$, λ_j étant la j -ième valeur propre de Λ_c .

La démonstration de ce corollaire est donnée en annexe D.

Remarques

- Les parties (a) et (b) du corollaire 2 généralisent le corollaire 1.1 de Wong et al. [5] au cas où la matrice de gain Λ_c n'est pas diagonale (puisque seul un choix particulier des directions propres de R en fonction de celles de Λ_c est exigé, et qu'il est toujours possible de prendre $R = \rho I_m$, $\rho \in \mathbb{R}^+$).
- La partie (c) du corollaire 2 généralise le corollaire 5 de Safonov-Athans [4],

où il est montré que, dans le cas où la matrice unitaire Λ_c et la matrice R sont toutes deux diagonales, la marge de phase du régulateur L.Q. multivariable est supérieure ou égale à 60° .

2) La partie (d) du corollaire 2 montre que la tolérance de réduction de gain diminue quand un déphasage (inférieur à $\Delta\phi$ en valeur absolue) est déjà présent dans la chaîne de commande. La marge de gain reste quant à elle infinie.

3) Le corollaire 2 indique que, si l'on pouvait, par choix des matrices Q et R de l'indice de performance, rendre λ_0 supérieur ou égal à 1, on obtiendrait une tolérance de réduction de gain supérieure ou égale à 100% et une marge de phase supérieure ou égale à 90° . Il convient donc de situer

$$L_{\max}^{-1} = R^{1/2} K Q^{-1} K^T R^{1/2}$$

par rapport à la matrice identité. Plus précisément, L_{\max}^{-1} est maintenant située par rapport à αI , où $\alpha \in \mathbb{R}$.

LEMME 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $L_{\max}^{-1} \leq \alpha I$ est que $PA + A^T P \leq (\alpha - 1)Q$, où α désigne un réel quelconque. De même, $L_{\max}^{-1} \geq \alpha I$ si, et seulement si $PA + A^T P \geq (\alpha - 1)Q$.

(Cf. démonstration en annexe E.)

Le lemme 2 et le théorème 3 conduisent à faire la remarque suivante, d'ailleurs peu surprenante :

Remarque : Si le système en boucle ouverte (1) n'est pas asymptotiquement stable, quelles que soient les matrices de pondération choisies, le théorème 3 ne peut garantir la stabilité du système contrôlé (12) (où $\Lambda_M = I_n$) s'il se produit simultanément, sur toutes les composantes de la commande, soit une réduction d'amplitude supérieure ou égale à 100% (sans déphasage), soit un déphasage supérieur ou égal à 90° en valeur absolue (sans variation d'amplitude).

En effet, supposons que $\lambda_0 > 1$. On a donc $L_{\max}^{-1} < I$, et il existe donc un réel $\alpha < 1$ pour lequel $L_{\max}^{-1} \leq \alpha I$. Par conséquent, d'après le lemme 2, $PA + A^T P \leq (\alpha - 1)Q < 0$, et, d'après le critère de Lyapunov, la matrice A est stable, ce qui démontre par l'absurde la remarque ci-dessus.

V. ROBUSTESSE STRUCTURELLE

Dans la Section IV ont été déterminées des conditions portant sur Λ_c et Λ_M pour que, lorsque le gain K est obtenu par minimisation de la fonction de coût (2), la matrice D , définie en (11), soit > 0 , ou, de façon équivalente

d'après le théorème 1 — pour que le système contrôlé (5) reste globalement asymptotiquement stable lorsque $f(x, t) \equiv 0$. Le but de cette Section est de présenter des conditions plus générales, portant à la fois sur Λ_c , Λ_M et $f(x, t)$, pour que $V(x) < 0$, sans imposer désormais que $f(x, t) \equiv 0$. Des propriétés de robustesse structurelle du régulateur L.Q. seront ainsi mises en évidence. Il est une nouvelle fois supposé que le gain K est optimal en absence de perturbations, et donc égal à $-R^{-1}B^T P$.

Des théorèmes 1 et 2 découlent le théorème suivant :

THÉORÈME 4 : Soient Λ_c et Λ_M des perturbations multiplicatives appartenant à \mathcal{M}_2 , c'est-à-dire vérifiant les conditions (T2.1) et (T2.2) du théorème 2, et soient un réel $\lambda_\Delta > 0$ et une matrice hermitienne Λ_Δ tels que l'équation (T2.3) soit vérifiée (λ_Δ et Λ_Δ existent nécessairement d'après (T2.2)). Il suffit alors, pour que $V(x) < 0$ (pour $x \neq 0$), que la perturbation additive $f(x, t)$ vérifie l'inégalité

$$\frac{\|T^{-1}f(x, t)\|}{\|T^{-1}x\|} < \mu \triangleq \frac{\lambda_\Delta}{2\|T^*PT\|_s \|(T^*D_m T)^{-1}\|_s} \quad (\text{T4.1})$$

où T est une matrice inversible arbitraire et où $D_m \triangleq Q + S^T(\lambda_\Delta^{-1}\Lambda_\Delta)S$.

Remarques

1) Ce théorème généralise le théorème 1 de Patel *et al.* [6]. En effet, si les chaînes de commande et de mesure sont parfaites, $\Lambda_c = I_m$ et $\Lambda_M = I_n$; par conséquent, $\Lambda = I_m$; $\lambda_\Delta = 1$ et $\Lambda_\Delta = I_m$ vérifient donc (T2.3). Pour $T = I_m$, on retrouve alors le théorème 1 de [6].

Il généralise également le théorème 2 énoncé plus haut, dont le théorème 3 et le corollaire 2 sont des cas particuliers (généralisant quant à eux le théorème 1 et le corollaire 1.1 de [5] et le corollaire 5 de [4]).

Il s'applique en outre au régulateur défini par le gain K_β après modification des relations (T2.2) et (T2.3) comme il est indiqué dans la remarque 2 suivant le théorème 2.

2) *Interprétation du théorème* : La classe des fonctions f vérifiant l'inégalité (T4.1) est d'autant plus grande que μ est plus grand. La robustesse structurelle du régulateur L.Q., ou du moins la mesure qu'en donne le théorème, augmente donc avec cette quantité. Pour des perturbations multiplicatives données Λ_c et Λ_M et pour des matrices de pondération données Q et R , il convient donc, afin que cette mesure ne soit pas exagérément pessimiste, de maximiser μ par rapport à λ_Δ , Λ_Δ et T , sous la contrainte (T2.3). D'autre part, on remarque que $\mu \geq \mu_m$ avec $\mu_m \triangleq \lambda_\Delta / [2\|T^*PT\|_s \|(T^*QT)^{-1}\|_s]$. Ce minorant μ_m est proportionnel à λ_Δ . Soit H_0 une matrice hermitienne > 0 donnée ; il

existe un λ_Δ maximum pour lequel l'inégalité (T2.3) (où H est remplacée par H_0) est vérifiée; soit λ_{Δ_0} cette valeur. Si $H \geq H_0$, la différence $H - \lambda_{\Delta_0} L$ est encore ≥ 0 . Ce choix λ_{Δ_0} de λ_Δ convient donc (dans le cadre du théorème 4) pour toutes les perturbations multiplicatives vérifiant (T2.1) et $H \geq H_0$. En imposant à Λ_c et Λ_M de vérifier (T2.1) et $H \geq H_0$, on restreint la marge de stabilité \mathcal{M}_2 à une marge \mathcal{M}_2^0 . Cette restriction, donc la préservation d'une différence $\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_2^0$, sert à pouvoir choisir un λ_Δ suffisamment grand pour l'inégalité (T4.1), et donc à garantir une bonne robustesse structurelle.

Un cas important est celui où la perturbation additive $f(x, t)$ s'écrit

$$f(x, t) = (\Delta A(t) + \Delta B(t) \Lambda_c K \Lambda_M) x + \delta(t), \quad (16)$$

où $\Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Delta B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\delta(t) \in \mathbb{R}^n$. Les matrices $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ représentent alors respectivement une erreur (de modélisation par exemple) sur les matrices A et B du système, et $\delta(t)$ représente une perturbation extérieure additive. Du théorème 4 se déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3 : Soient Λ_c et Λ_M des perturbations multiplicatives vérifiant (T2.1) et (T2.2), et soient un réel λ_Δ , $0 < \lambda_\Delta \leq 1$ et une matrice hermitienne $\Lambda_\Delta \geq 0$ vérifiant (T2.3). Il suffit, pour que $V(x) < 0$ (pour $x \neq 0$), que

a) les matrices $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ aient des normes spectrales suffisamment petites pour que l'inégalité

$$\mu_0(t) \triangleq \|\Delta A'(t)\|_s + \sigma \|\Delta B'(t)\|_s \|K'\|_s \|\Lambda\|_s < \mu \quad (C3.1)$$

soit vérifiée, où μ est défini selon (T4.1), et où $\sigma \triangleq \|R^{1/2}\|_s \|R^{-1/2}\|_s \|\Delta A'(t)\|_s \triangleq T^{-1} \Delta A(t) T$, $\Delta B'(t) \triangleq T^{-1} \Delta B(t)$ et $K' \triangleq K T$ (T étant une matrice inversible arbitraire de $C^{n \times n}$ et K étant le gain optimal); et

b) $\|T^{-1} \delta(t)\| / \|T^{-1} x\| < \mu - \mu_0(t)$.

(Voir démonstration en annexe F.)

Remarque : Si $\Lambda_M = I_n$ et Λ_c est normale et diagonalise dans la même base que R , on obtient un résultat semblable (où (T2.1) est cette fois trivialement vérifié et où (T2.2) se simplifie en (T3.1)), mais avec $\sigma = 1$. Ce résultat constitue alors une généralisation du théorème 2 de Patel et al. [6].

VI. CONCLUSION

Nombre de résultats connus sur la robustesse des régulateurs L.Q. ont été retrouvés de manière synthétique et généralisés. La notion de marge de stabilité introduite dans cet article permet de distinguer, en multivariable, les effets des perturbations multiplicatives affectant la chaîne de mesure et la chaîne

de commande. Une marge de stabilité garantie du régulateur L.Q. a été quantifiée (théorème 2). Les propriétés connues de marge de gain, marge de phase et tolérance de réduction de gain du régulateur L.Q. ont été généralisées (théorème 3); la manière dont il convient de choisir les matrices de pondération de l'indice de performance pour augmenter ces quantités a été indiquée. Enfin, il a été montré que le régulateur L.Q. conserve une robustesse structurelle lorsque la différence entre la marge de stabilité quantifiée dans le théorème 2 et la classe de perturbations multiplicatives affectant réellement le système, reste suffisamment grande (théorème 4 et remarques suivantes). La matrice T de normalisation, également introduite ici, permet de rendre plus réaliste la quantification de la robustesse structurelle du régulateur.

ANNEXE A

Démonstration du théorème 1

Par substitution de (5) dans $\dot{V}(x) = \dot{x}^* P x + x^* P \dot{x}$ et par utilisation de la définition (11) de D , on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= [(A + B \Lambda_c K \Lambda_M) x + f(x, t)]^* P x + x^* P [(A + B \Lambda_c K \Lambda_M) x + f(x, t)] \\ &= -x^* D x + 2 x^* P f(x, t). \end{aligned}$$

Posons $y \triangleq T^{-1} x$. Il vient

$$\dot{V}(x) = -y^* T^* D T y + 2 y^* T^* P T [T^{-1} f(x, t)] = -y^* M_1 y + 2 y^* M_2 z$$

avec $M_1 \triangleq T^* D T$, $M_2 \triangleq T^* P T$ et $z \triangleq T^{-1} f(x, t)$.

On a

$$\|y^* M_2 z\| \leq \|y\| \|M_2\| \|z\|$$

et, pour $M_1 > 0$,

$$\|y\|^2 / \|M_1^{-1}\|_s \leq y^* M_1 y.$$

Il suffit donc, pour que $\dot{V}(x) < 0$, que $M_1 > 0$ et que

$$2 \|y\| \|M_2\| \|z\| < \|y\|^2 / \|M_1^{-1}\|_s.$$

Or, $M_1 > 0$ équivaut à $D > 0$ et la deuxième condition équivaut à (T1.2) pour $x \neq 0$. Le théorème est donc démontré.

1. Démonstration du lemme 1

On a par hypothèse $Q > 0$; on peut donc former la matrice $SQ^{-1}S^T = F^T F$, avec $F \triangleq Q^{-1/2}S^T = -Q^{-1/2}PBR^{1/2}$. Or, par hypothèse, $R > 0$ et B est de rang maximum. La matrice F est donc de rang maximum. De plus, $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et par hypothèse $m \leq n$. Par conséquent, $F^T F$ est inversible. On a

$$Q - S^T(SQ^{-1}S^T)S = Q^{1/2}[I - F(F^T F)^{-1}F^T]Q^{1/2} \\ = Q^{1/2}[I - FF^*]Q^{1/2} \geq 0.$$

Soit maintenant $L \geq 0$ telle que $Q - S^T L S \geq 0$; cela équivaut à $I - F L F^T \geq 0$, ce qui entraîne $F^T F - F^T F L F^T F \geq 0$ et donc $L \leq (F^T F)^{-1}$. Inversement, si $0 \leq L \leq (F^T F)^{-1}$, on a bien $F^T[F L F^T - I]F \leq 0$ et donc $Q - S^T L S \geq 0$.

2. Démonstration du théorème 2

Une condition suffisante est déterminée pour que D , défini selon (11), soit > 0 . D'après le corollaire 1, le système contrôlé (11) sera alors globalement asymptotiquement stable. On a

$$D = Q - K^T R K + K^T R \Lambda_c K \Lambda_M + \Lambda_M^* K^T \Lambda_c^* R K \\ = Q - S^T S + S^T R^{1/2} \Lambda_c R^{1/2} S \Lambda_M + \Lambda_M^* S^T R^{-1/2} \Lambda_c^* R^{1/2} S \\ = Q - S^T S + S^T (\Lambda + \Lambda^*) S + S^T \Lambda (I - S^* S) + (I - S^T S^{T*}) \Lambda^* S. \quad (\text{B.1})$$

Soit y un vecteur de \mathbb{C}^n tel que $\exists x \in \mathbb{C}^n$ pour lequel $y = (I_n - S^* S)x$. D'après les propriétés de la pseudo-inverse, $Sy = R^{1/2}Ky = 0$. Comme $R^{1/2}$ est inversible, on en déduit que $y \in \text{Ker } K$.

Supposons ((T2.1)) que $\text{Ker } K \subset \text{Ker}(K \Lambda_M)$. On a donc $y \in \text{Ker}(K \Lambda_M)$, et donc $S \Lambda_M y = 0$. Par conséquent,

$$S \Lambda_M (I_n - S^* S) = 0. \quad (\text{B.2})$$

L'expression (B.1) se simplifie donc en

$$D = Q + S^T (\Lambda + \Lambda^* - I) S. \quad (\text{B.3})$$

Posons $H \triangleq \Lambda^* + \Lambda - I + L$, où L vérifie (14). Il vient

$$D = Q + S^T [H - L] S.$$

Pour $H > 0$ et $L \geq 0$, il existe un réel λ_Δ , $0 < \lambda_\Delta \leq 1$ tel que $H - \lambda_\Delta L \triangleq \Lambda_\Delta \geq 0$. On obtient donc

$$D = \lambda_\Delta Q + (1 - \lambda_\Delta) [Q - S^T L S] + S^T \Lambda_\Delta S,$$

et, d'après (14), $D \geq \lambda_\Delta Q + S^T \Lambda_\Delta S > 0$.

Le théorème est donc démontré.

ANNEXE C

Démonstration du théorème 3

Le théorème 3 se démontre à partir du théorème 2 pour $\Lambda_M = I_n$. La relation (T2.1) est alors vérifiée. La condition (T2.2) devient

$$R^{1/2} \Lambda_c R^{-1/2} + (R^{1/2} \Lambda_c R^{-1/2})^* \geq I - L. \quad (\text{C.1})$$

Si la matrice Λ_c est normale, elle diagonalise dans une base orthogonale. Si cette base diagonalise aussi R , et donc $R^{1/2}$, alors ces matrices commutent et la condition (C.2) devient :

$$\Lambda_c^* + \Lambda_c > I - L. \quad (\text{C.2})$$

Après utilisation de la définition (6) de G et Φ , du fait que G et $\exp(i\Phi)$ commutent puisque Λ_c est normale [8], et de la définition

$$\cos \Phi = (1/2)(\exp(i\Phi) + \exp(-i\Phi)), \quad (\text{C.3})$$

la relation (C.2) s'écrit encore

$$G \cos \Phi > (1/2)(I - L). \quad (\text{C.4})$$

La marge de stabilité exprimée par l'inéquation (C.4) est maximale quand la matrice L prend sa valeur maximale exprimée dans le lemme 1. D'où le théorème.

ANNEXE D

Démonstration du corollaire 2

Considérons la matrice normale Λ_c et la matrice unitaire U qui la diagonalise. Il découle de (6) que $U^{-1}GU = \text{diag}(g_j)$, $g_j \geq 0$, et

$$U^{-1} \exp(i\Phi) U = \text{diag}(\exp i\varphi_j), \quad -\pi < \varphi_j \leq +\pi.$$

De même, d'après la définition (C.3) de $\cos \Phi$, $U^{-1} \cos \Phi U = \text{diag}(\cos \varphi_j)$. La condition (T3.1) s'écrit donc

$$UU^{-1}GUU^{-1} \cos \Phi UU^{-1} = U \text{diag}(g_j \cos \varphi_j) U^{-1} > (1/2)(I - L_{\max}). \quad (\text{D.1})$$

Or, d'après la définition (15) de λ_0 , $I - L_{\max} \leq (1 - \lambda_0)I$. Une condition suffisante pour que l'inégalité (D.1) soit vérifiée est donc

$$U \text{diag}(g_j \cos \varphi_j) U^{-1} > (1/2)(1 - \lambda_0)I,$$

ou

$$\text{diag}(g_j \cos \varphi_j) > (1/2)(1 - \lambda_0)I,$$

ou encore

$$\min_{j \in \{1, \dots, m\}} (g_j \cos \varphi_j) > (1/2)(1 - \lambda_0),$$

ce qui démontre le corollaire.

ANNEXE E

Démonstration du lemme 2

On a les équivalences suivantes, encore vraies si l'on inverse le sens des inégalités :

$$\begin{aligned} R^{1/2} KQ^{-1} K^T R^{1/2} &\leq \alpha I \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (Q^{-1/2} K^T R^{1/2})(R^{1/2} KQ^{-1} K^T R^{1/2})(R^{1/2} KQ^{-1/2}) &\leq \\ &\leq \alpha(Q^{-1/2} K^T R^{1/2})(R^{1/2} KQ^{-1/2}) \\ \Leftrightarrow Q^{-1/2} K^T RKQ^{-1/2}[Q^{-1/2} K^T RKQ^{-1/2} - \alpha I] &\leq 0 \\ \Leftrightarrow Q^{-1/2} K^T RKQ^{-1/2} - \alpha I &\leq 0 \Leftrightarrow K^T RK \leq \alpha Q; \end{aligned}$$

cette dernière inégalité équivaut, d'après (3), à $PBR^{-1}B^T P \leq \alpha Q$, ou encore, d'après (4), à $PA + A^T P \leq (\alpha - 1)Q$. Le lemme est ainsi démontré.

ANNEXE F

Démonstration du corollaire 3

Il suffit de démontrer que les deux inégalités du corollaire, prises conjointement, impliquent (T4.1) lorsque $f(x, t)$ vérifie (16). Puisque

$$T^{-1}f(x, t) = (T^{-1} \Delta A(t) T + T^{-1} \Delta B(t) \Lambda_c K \Lambda_M T) T^{-1}x + T^{-1} \delta(t),$$

quelle que soit la matrice inversible $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on a

$$\|T^{-1}f(x, t)\| \leq [\|\Delta A'(t)\|_s + \|\Delta B'(t)\|_s \|\Lambda_c K \Lambda_M T\|] \|T^{-1}x\| + \|T^{-1} \delta(t)\|. \quad (\text{F.1})$$

D'autre part, d'après (13),

$$\Lambda = R^{1/2} \Lambda_c K \Lambda_M (R^{1/2} K)^\# . \quad (\text{F.2})$$

Comme $\text{Ker } K \subset \text{Ker}(K \Lambda_M)$ et que $R^{1/2}$ est inversible,

$$K \Lambda_M (R^{1/2} K)^\# (R^{1/2} K) = K \Lambda_M$$

(voir (B.2)). L'équation (F.2) entraîne donc $\Lambda_c K \Lambda_M = R^{-1/2} \Lambda R^{1/2} K$, d'où

$$\|\Lambda_c K \Lambda_M T\|_s \leq \sigma \|K'\|_s \|A\|_s,$$

avec

$$\sigma \triangleq \|R^{-1/2}\|_s \|R^{1/2}\|_s \text{ et } K' \triangleq KT.$$

L'inégalité (F.1) entraîne donc

$$\|T^{-1}f(x, t)\| \leq \mu_0(t) \|T^{-1}x\| + \|T^{-1} \delta(t)\|,$$

où $\mu_0(t)$ est défini selon (C3.1).

Supposons maintenant que les deux inégalités du corollaire soient conjointement vérifiées : on obtient alors l'inégalité (T4.1). Le corollaire est donc démontré.

RÉFÉRENCES

- [1] A. R. BRYSON, JR. ET Y.-C. HO, *Applied Optimal Control*, Hemisphere, Washington, D.C., 1975.
- [2] B. D. O. ANDERSON, J. B. MOORE, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [3] P.-K. WONG, M. ATHANS, *Closed-Loop Structural Stability for Linear-Quadratic Optimal Systems*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-22, n° 1, février 1977, 94-99.
- [4] M. G. SAFONOV, M. ATHANS, *Gain and Phase Margin for Multiloop LOG Regulators*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-22, n° 2, avril 1977, 173-179; Proc. 1976, I.E.E.E. C.D.C., décembre 1976, Clearwater, Floride.
- [5] P.-K. WONG, G. STEIN, M. ATHANS, *Structural Reliability and Robustness Properties of Optimal Linear-Quadratic Multivariable Regulators*, Proc. 7^e I.F.A.C. Congress, Helsinki, 1978, 1797-1805.
- [6] R. V. PATEL, M. TODA, B. SRIDHAR, *Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-22, n° 6, décembre 1977, 945-949.
- [7] H. BOURLÈS, *Sur la robustesse des régulateurs linéaires multivariables, optimaux pour une fonctionnelle de coût quadratique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, n° 22 (22 juin 1981), série I, 971-974.
- [8] F. R. GANTMACHER, *Théorie des matrices*, Dunod, 1966.
- [9] R. E. KALMAN, J. E. BERTRAM, *Control System Analysis and Design via the « Second Method » of Lyapunov*, A.S.M.E. Trans., J. of Basic Engineering, vol. 82, juin 1960, 371-400.
- [10] P. MOLANDER, J. C. WILLEMS, *Synthesis of State Feedback Control Laws with a Specified Gain and Phase Margin*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-25, n° 5, octobre 1980, 928-931.
- [11] N. A. LEHTOMAKI, N. R. SANDELL, M. ATHANS, *Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-26, n° 1, février 1981, 75-92.
- [12] R. E. KALMAN, *When is a Linear Control System Optimal ?*, A.S.M.E. Trans., J. of Basic Engineering, vol. 86, mars 1964, 51-60.