APII - 1986 - 19 - 455 - 473 **Théorie de la commande et grands systèmes**

Stabilité de degré α des systèmes régis par une équation différentielle fonctionnelle (*)

H. Bourlès [1]

Résumé/*Abstract*

Dans cet article est donnée une condition suffisante de « stabilité de degré α » pour un système régi par une équation différentielle fonctionnelle dans un espace hilbertien. Lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle ordinaire, on retrouve le Critère de Lyapunov (mais généralisé au cas de la dimension infinie). Un cas d'application particulièrement intéressant est celui où le système est régi par une équation intégro-différentielle. On trouve alors une autre généralisation du Critère de Lyapunov, dont l'intérêt pratique est montré sur des exemples.

Outre les notions de « stabilité de degré α » (asymptotique et entrée-sortie), sont définies dans cet article les notions de détectabilité et détectabilité forte de degré α ; sont définies également les notions d'α-gain et d'α-secteur.

In this paper, a sufficient condition for a system governed by a functional differential equation in a Hilbert space to be " stable with a degree α " is given. In the case of an o.d.e., Lyapunov criterion is recaptured (but generalized to the infinite-dimensional case). The case of a system governed by an integro-differential equation constitutes an application of particular interest. A further generalization of Lyapunov criterion is then derived, the practical interest of which is shown via some examples.

In addition to the notions of " stability with a degree α " (asymptotic and in the input-output sense), the notions of detectability and strong detectability with a degree α, as well as the notions of α-gain and α-sector, are defined in this paper.

Mots clés/*Keywords*

Degré de stabilité — degré de détectabilité — α-gain — α-secteur — équation différentielle fonctionnelle.

Degree of stability — degree of detectability — α-gain — α-sector — functional differential equation.

(*) Reçu en mars 1985.

(1) Professeur à l'École Supérieure d'Informatique-Électronique-Automatique (ESIEA), 9, rue Vésale, 75005 Paris.

1. Introduction

On étudie dans cet article la stabilité (entendue selon diverses acceptions) d'un système (Σ) régi par une équation différentielle fonctionnelle très générale, de la forme :

$$\dot{x}(t) = [F(x)](t) + v(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

La fonction v est considérée, non comme un terme de commande, mais comme une perturbation extérieure. L'opérateur F associe à la fonction x la fonction $F(x)$. On peut donner différents exemples d'un tel opérateur :

Exemple 1 :

$$[F(x)](t) = f(x(t), t).$$

F est alors un opérateur (généralement non linéaire) sans mémoire ; dans ce cas, l'équation (1) devient une équation différentielle ordinaire.

Exemple 2 :

$$[F(x)](t) = \int_0^{+\infty} H(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

L'équation (1) est alors une équation intégro-différentielle linéaire.

Exemple 3 :

$$[F(x)](t) = (T * x)(t) + f(x(t), t), \tag{2}$$

où $T * x$ désigne le produit de convolution de la matrice de distributions T par la fonction vectorielle x. On a alors un nouveau cas d'équation intégro-différentielle.

La stabilité asymptotique d'un système régi par (1) lorsque l'opérateur F vérifie (2) a été étudiée dans (Bourlès, 1984). Cette approche est très utile pour obtenir des résultats de robustesse (Bourlès, 1981 à 1984). En effet, il est montré dans (Bourlès, 1984) qu'un système modélisé par une équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ et régulé par une commande $u = Kx$, se met sous la forme (1) (avec $v = 0$) lorsqu'on prend en compte l'erreur de modèle et le fait que les actionneurs qui mettent en œuvre la commande ont une matrice de réponses impulsionnelles qui en pratique est différente de celle du cas idéal, à savoir $I\delta$ (I désignant la matrice identité et δ l'impulsion de Dirac). Cette approche a été étendue au cas des systèmes à temps discret (Joannic, 1983 et 1984).

Il existe deux notions très différentes de stabilité : la *stabilité interne* (stabilité au sens de Lyapunov, ou stabilité asymptotique) et la *stabilité entrée-sortie*. Ces deux types de stabilité sont étudiés ici.

Il est intéressant de compléter ces différentes notions pour faire intervenir l'idée de *degré* de stabilité. Grossièrement, on dira par exemple que (Σ) est asymptotiquement stable de degré α si, pour $v = 0$, $e^{\alpha t}\, x(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Pour $\alpha = 0$, on retrouve la notion de stabilité asymptotique classique. Pour $\alpha > 0$, on assure une vitesse de convergence. Pour $\alpha < 0$ enfin, on obtient un système qui peut être instable, mais « pas trop ».

La Section 2 est consacrée à des préliminaires, où en particulier sont données des définitions nouvelles permettant de *formaliser la notion de degré de stabilité*. Les autres préliminaires sont : les notations employées, et la notion de *solution* d'une équation telle que (1).

La Section 3, qui est la plus importante, est consacrée à l'énoncé de plusieurs conditions suffisantes de stabilité de degré α : tout d'abord un théorème général, puis différentes conséquences de ce théorème. En particulier, deux généralisations du Critère de Lyapunov sont proposées : la première concerne les systèmes différentiels linéaires stationnaires dans les espaces hilbertiens ; la seconde concerne les systèmes intégro-différentiels linéaires stationnaires dans R^n. Des exemples sont donnés qui montrent l'intérêt des conditions de stabilité obtenues.

La Section 4, enfin, est réservée à la conclusion.

2. Préliminaires

2.1. Notations et conventions

2.1.1. E désigne un espace de Hilbert réel. Si ξ_1 et ξ_2 sont éléments de E, $\| \xi_1 \|$ désigne la norme de ξ_1 et $(\xi_1 \mid \xi_2)$ désigne le produit scalaire de ξ_1 et ξ_2.

2.1.2. α est un nombre réel. $L_2^E(\alpha)$ est l'ensemble des applications Lebesgue-mesurables $x : R \to E$, nulles sur $]-\infty, 0[$, telles que :

$$\| x \|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} \| e^{\alpha t}\, x(t) \|^2\, dt < +\infty \; (*).$$

Si x et y sont éléments de $L_2^E(\alpha)$, on note $\langle x, y \rangle_\alpha$ le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{2\alpha t} (x(t) \mid y(t))\, dt.$$

(*) Selon un abus de langage courant, on confondra dans cet article une fonction et sa classe de Lebesgue.

$L^E_{2,e}(\alpha)$ est l'ensemble des applications mesurables $x : R \to E$, nulles sur $]-\infty, 0[$, telles que $\forall t \geqslant 0$:

$$\| x \|^2_{t,\alpha} = \int_0^t \| e^{\alpha\tau} \; x(\tau) \|^2 \, d\tau < +\infty \, (*) .$$

Si x et y sont éléments de $L^E_{2,e}(\alpha)$, on note $\langle x, y \rangle_{t,\alpha}$ la quantité :

$$\langle x, y \rangle_{t,\alpha} = \int_0^t e^{2\alpha\tau} (x(\tau) \mid y(\tau)) \, d\tau .$$

Si $\alpha = 0$, l'indice α sera omis.
Soit $x : R \to E$. On désigne par x_α l'application $t \to e^{\alpha t} x(t)$.

2.1.3. Soit G un espace de Hilbert et $C \in \mathscr{L}(E, G)$ (où $\mathscr{L}(E, G)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de E dans G). L'application C définit une application Γ de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^G_{2,e}(\alpha)$ par :

$$\forall x \in L^E_{2,e}(\alpha) , \quad \forall t \geqslant 0 , \quad [\Gamma(x)] \, (t) = Cx(t) .$$

Par abus de langage, on confondra par la suite les applications C et Γ, c'est-à-dire que, suivant le cas, C sera considérée comme application de E dans G ou de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^G_{2,e}(\alpha)$.

2.2. Notion de solution

Considérons l'équation (1), où F est un opérateur de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^E_{2,e}(\alpha)$ et où $v \in L^E_{2,e}(\alpha)$. On dira que $z \in L^E_{2,e}(\alpha)$ est solution de (1) si :

i) z est absolument continue sur R^+ (Alexéev, 1982) et
ii) z vérifie Lebesgue-presque-partout sur R^+ l'égalité :

$$\dot{z}(t) = [F(z)] \, (t) + v(t) .$$

Si de plus $z(0) = x_0 \in E$, on dira que z vérifie la condition initiale x_0.
Dans toute la suite, on supposera que F est tel que $\forall v \in L^E_{2,e}(\alpha)$, $\forall x_0 \in E$, l'équation (1) admet une solution unique vérifiant la condition initiale x_0. Cette solution sera notée $\varphi(x_0, v, .) : t \to \varphi(x_0, v, t)$.

Remarque : On n'explicite pas dans cet article de conditions sur F pour que les propriétés ci-dessus soient vérifiées. D'un point de vue pratique, on peut d'ailleurs considérer comme superflu l'énoncé de telles conditions (en pratique en effet, l'équation (1) sera obtenue par modélisation d'un système physique). Il est raisonnable de se limiter au cas où F est causal.

(*) En tant qu'ensemble, $L^E_{2,e}(\alpha)$ coïncide avec $L^E_{2,e} \triangleq L^E_{2,e}(0)$; pour $\alpha \neq 0$, il en diffère une fois muni de la famille de semi-normes $\| . \|_{t,\alpha}$.

2.3. Définitions

2.3.1. *Stabilités de degré* α

i) *Lyapunov-stabilité de degré* α

« Le système (Σ) est Lyapunov-stable de degré α si :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists \eta > 0 : \forall x_0 \in E , \quad \| x_0 \| \leqslant \eta \Rightarrow \forall t \geqslant 0 , \quad \| e^{\alpha t} \varphi(x_0, 0, t) \| \leqslant \varepsilon . »$$

ii) *Attractivité de degré* α

« L'origine de E est attractive (resp. globalement attractive) de degré α pour le système (Σ) si : il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $\forall x_0 \in U$ (resp. $\forall x_0 \in E$), $\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} \varphi(x_0, 0, t) = 0$. »

iii) *Stabilité asymptotique de degré* α

« (Σ) est asymptotiquement stable (resp. globalement asymptotiquement stable) de degré α, si (Σ) est Lyapunov-stable de degré α, et si l'origine est attractive (resp. globalement attractive) de degré α pour (Σ). »

iv) *Stabilité de degré* α *au sens entrée-sortie*

« (Σ) est L_2-stable de degré α au sens entrée-sortie si $\exists (\gamma, \delta) \in R^{+2}$ tel que :

$$\forall x_0 \in E , \quad \forall v \in L^E_{2,e}(\alpha) , \quad \forall t \geqslant 0 , \quad \| \varphi(x_0, v, .) \|_{t,\alpha} \leqslant \gamma + \delta \| v \|_{t,\alpha} . »$$

Remarques :

1) Le seul espace L_p utilisé dans cet article est L_2. Si (Σ) vérifie la propriété ci-dessus, on dira donc en abrégé que « (Σ) est stable de degré α au sens entrée-sortie ».

2) Pour $\alpha = 0$, on retrouve les types classiques de stabilité (Vidyasagar, 1978).

3) Ces définitions ont encore un sens si E est un espace de Banach.

2.3.2. *Détectabilités de degré* α

i) *Détectabilité de degré* α

« Soit G un espace de Hilbert et $C \in \mathscr{L}(E, G)$. Le couple $(C, (\Sigma))$ est détectable de degré α si $(\forall x_0 \in E) \, (C\varphi(x_0, 0, .) \in L^G_2(\alpha) \Rightarrow \varphi(x_0, 0, .) \in L^E_2(\alpha))$. »

ii) *Détectabilité forte de degré α*

« $(C, (\Sigma))$ est fortement détectable de degré α si :

1° $(C, (\Sigma))$ est détectable de degré α et

2° $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x_0 \in E : \| C\varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha \leqslant \eta \Rightarrow \| \varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha \leqslant \varepsilon.$ »

Remarque : La première de ces définitions généralise la notion de *détectabilité* introduite dans (Safonov, 1977); la seconde généralise la notion de *détectabilité forte* introduite dans (Bourlès, 1984).

On déduit immédiatement des Propositions 1 et 2 de (Bourlès, 1984) le résultat suivant :

PROPOSITION 1 : *Supposons que* $E = R^n$, *que* $[F(x)](t) = Ax(t)$, *où* $A \in \mathscr{L}(R^n, R^n)$, *et que* $G = R^m$. *Alors* :

i) $(C, (\Sigma))$ *est détectable de degré α si et seulement si* $(C, A + \alpha I)$ *est détectable* (*la détectabilité étant prise ici dans son sens classique* (Wonham, 1979)).

ii) $(C, (\Sigma))$ *est fortement détectable de degré α si et seulement si* (C, A) *est observable.* »

D'autre part, on a évidemment le résultat suivant :

PROPOSITION 2 : *Soit G un espace de Hilbert et* $C \in \mathscr{L}(E, G)$ *un opérateur tel que* $C^* C$ *est coercif* (C^* *désignant l'adjoint de* C) (*). *Alors,* $(C, (\Sigma))$ *est fortement détectable de degré α.*

Notons que dans ce cas, G est isomorphe à E, et peut donc lui être identifié. Remarquons d'autre part qu'en dimension finie, il suffit de supposer $C^* C$ défini positif, car il est alors coercif; ce n'est plus le cas en dimension infinie.

2.3.3. *Gain et secteur de degré α*

i) *Gain de degré α* (ou α-gain)

« Soit F un opérateur de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^E_{2,e}(\alpha)$. On dira que F *est à gain de degré α fini* s'il existe des constantes $k \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ telles que $\forall x \in L^E_{2,e}(\alpha)$, $\forall t \geqslant 0$:

$$\| F(x) \|_{t,\alpha} \leqslant k \| x \|_{t,\alpha} + b. \tag{3}$$

La borne inférieure des constantes k vérifiant la proposition ci-dessus sera appelée le *gain de degré α* (ou l'α-gain) de F.

Remarque : La notion ci-dessus n'est pas à proprement parler une généralisation; en effet, le concept général de gain d'un opérateur recouvre cette notion (voir Vidyasagar, 1978 et 1981) et (Desoer, 1975). Le degré α apparaît explicitement ici car nous avons précisé le produit scalaire employé.

(*) L'opérateur hermitien Q est coercif s'il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall \xi \in E$, $(Q\xi \mid \xi) \geqslant \gamma \| \xi \|^2$.

En utilisant la même idée, on est amené à prendre la définition suivante :

ii) *Secteur de degré α* (*ou α-secteur*)

« Soit $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ une matrice formée d'opérateurs S_{ij} de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^E_{2,e}(\alpha)$. Soit d'autre part F un opérateur de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^E_{2,e}(\alpha)$. On dira que le graphe de F est inclus dans l'α-secteur S, et on écrira

$$\text{Graphe } F \subset \alpha\text{-sect } S,$$

si $\forall x \in L^E_{2,e}(\alpha)$, $\forall t \geqslant 0$, $\langle S_{11} y + S_{12} x,\ S_{21} y + S_{22} x \rangle_{t,\alpha} \leqslant 0$ (*), où $y = F(x)$. »

Nous rappelons que sous sa forme la plus générale, la notion de secteur a été définie dans (Safonov, 1980).

Il importe à présent de donner quelques exemples d'opérateurs à gain de degré α fini.

Exemple 1 : Soit F l'opérateur défini par :

$$\forall t \geqslant 0,\quad \forall x \in L^E_{2,e}(\alpha),\quad [F(x)](t) = f(x(t), t),$$

où f est une application continue de $E \times R^+$ dans E vérifiant la condition :

$$\exists k \geqslant 0,\quad \forall t \geqslant 0,\quad \forall \xi \in E : \| f(\xi, t) \| \leqslant k \| \xi \|. \tag{4}$$

On montre immédiatement que F est de gain de degré α fini, et que ce gain est inférieur ou égal à k.

Exemple 2 : Considérons le cas où $E = R^n$, et identifions dans la base canonique de R^n les endomorphismes avec les matrices carrées, ainsi que les vecteurs avec les matrices unicolonnes.

Soit alors F l'opérateur de $L^{R^n}_{2,e}(\alpha)$ dans $L^{R^n}_{2,e}(\alpha)$ défini par $F(x) = T * x$, où T est une matrice de dimension $n \times n$, formée de mesures de Radon à support positif (ce qui rend F causal : voir (Feintuch, 1982) et (Bourlès, 1984)).

On a le résultat suivant, démontré en Annexe 1 :

PROPOSITION 3 : *Pour tout couple* (i, j), *soit* $(T_{ij})_\alpha$ *le produit de la mesure* T_{ij} *par la fonction* $t \to e^{\alpha t}$. *Si* $\forall (i, j)$ *la mesure* $(T_{ij})_\alpha$ *est bornée, alors F est à gain de degré α fini, et ce gain est inférieur ou égal à* $n \operatorname{Max}_{i,j} \| T_{ij} \|_\alpha$, *où* $\| T_{ij} \|_\alpha$ *désigne la norme de* $(T_{ij})_\alpha$ *dans l'espace des mesures bornées.*

(*) L'α-secteur S est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant cette inégalité quel que soit $t \geqslant 0$.

Remarque : Les résultats de cet article sont valables lorsque l'équation (1) est, plus généralement, de la forme :

$$\dot{x}(t) = [\mathscr{F}(x, v)](t), \tag{1'}$$

où l'opérateur $v \to \Delta\mathscr{F}(x, v) \triangleq \mathscr{F}(x, v) - F(x)$ (avec $F(x) \triangleq \mathscr{F}(x, 0)$) est à gain de degré α fini uniformément par rapport à x, c'est-à-dire vérifie la propriété :

$\exists(\lambda, \mu) \in R^{+2}$:

$$\forall x \in L^E_{2,e}(\alpha), \quad \forall v \in L^G_{2,e}(\alpha), \quad \forall t \geqslant 0, \quad \| \Delta\mathscr{F}(x, v) \|_{t,\alpha} \leqslant \lambda + \mu \| v \|_{t,\alpha}.$$

3. Théorie de la stabilité de degré α

3.1. Cas général

Le théorème fondamental de cet article est donné ci-dessous. Il est démontré en Annexe 2.

Théorème 1 : *Considérons le système (Σ) défini par l'équation (1), où F est un opérateur de $L^E_{2,e}(\alpha)$ dans $L^E_{2,e}(\alpha)$, à gain de degré α fini.*

a) *Supposons qu'il existe deux opérateurs hermitiens positifs P et Q de $\mathscr{L}(E, E)$ tels que :*

i) $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est détectable de degré α* (*).

ii) *Graphe* $F \subset \alpha\text{-sect}\begin{pmatrix} 0 & I \\ P & \alpha P + Q/2 \end{pmatrix}$ *où I désigne l'opérateur identité de E* (*voir* § 2.1.3). *Alors, l'origine de E est globalement attractive de degré α pour* (Σ).

b) *Si de plus* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est fortement détectable de degré α, alors* (Σ) *est globalement asymptotiquement stable de degré α.*

c) *Enfin, si Q est coercif, alors* (Σ) *est, de plus, stable de degré α au sens entrée-sortie.*

Remarque : La condition (ii) est très proche de la condition suffisante du Critère de Lyapunov, et peut en être considérée comme une généralisation. Cela apparaîtra plus clairement dans les paragraphes suivants. Un exemple d'application de ce théorème sera donné au § 3.4.

(*) $\sqrt{Q}$ est la racine carrée positive de l'opérateur Q (voir par exemple (Kantorovitch, 1981), Chap. V).

3.2. Cas d'une équation différentielle ordinaire

Considérons maintenant le cas où $[F(x)](t) = f(x(t), t)$, où la fonction continue $f : E \times R^+ \to E$ vérifie la condition (4). L'équation (1) devient donc $\dot{x}(t) = f(x(t), t) + v(t)$. On déduit immédiatement du Théorème 1 le résultat suivant :

Corollaire : *Supposons qu'il existe deux opérateurs positifs P et Q de $\mathscr{L}(E, E)$ tels que $\forall \xi \in E$, $\forall t \geqslant 0$:*

$$(\xi \mid P[\alpha\xi + f(\xi, t)]) \leqslant -\frac{1}{2}(\xi \mid Q\xi). \tag{5}$$

a) *Si* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est détectable de degré α, alors l'origine de E est globalement attractive de degré α pour* (Σ).

b) *Si* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est fortement détectable de degré α, alors* (Σ) *est globalement asymptotiquement stable de degré α.*

c) *Si Q est coercif, alors* (Σ) *est, de plus, stable de degré α au sens entrée-sortie.*

d) *En particulier, s'il existe $\beta > \alpha$ tel que $\forall \xi \in E$, $\forall t \geqslant 0$,*

$$(\xi \mid f(\xi, t)) \leqslant -\beta \| \xi \|^2, \tag{6}$$

alors (Σ) *est globalement asymptotiquement stable de degré α et stable de degré α au sens entrée-sortie.*

Remarque : Considérons le cas où $f(\xi, t) = A\xi$, $A \in \mathscr{L}(E, E)$. Il est immédiat que, pour que la condition (5) soit vérifiée, il suffit que :

$$(A + \alpha I)^* P + P(A + \alpha I) = -Q. \tag{7}$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient donc une condition semblable à la condition suffisante du Critère de Lyapunov (Wonham, 1979) (mais en dimension a priori infinie). Notons que, bien évidemment, en dimension finie, dire que le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable de degré α, revient à dire que l'endomorphisme A a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement inférieure à $-\alpha$. On voit donc qu'en dimension finie, l'ensemble des degrés de stabilité asymptotique du système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est un sous-ensemble ouvert de R (ou encore que si α est un degré de stabilité asymptotique, on peut trouver $\beta > \alpha$ qui soit encore un degré de stabilité asymptotique). C'est pourquoi on peut considérer le théorème suivant comme une généralisation du Critère de Lyapunov au cas de la dimension infinie ; ce théorème est démontré en Annexe 3.

THÉORÈME 2 (Généralisation du Critère de Lyapunov) : *Considérons le système* (Σ) *d'équation* $\dot{x}(t) = Ax(t) + v(t)$, *où* $A \in \mathscr{L}(E, E)$. *Soit* $Q \in \mathscr{L}(E, E)$ *un opérateur positif.*

a) *Si* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est détectable (resp. fortement détectable) de degré* α *et s'il existe un opérateur positif* $P \in \mathscr{L}(E, E)$ *tel que l'équation* (7) *soit vérifiée, alors l'origine de E est globalement attractive de degré* α *pour* (Σ) *(resp.* (Σ) *est globalement asymptotiquement stable de degré* α*). Si de plus Q est coercif, alors* (Σ) *est stable de degré* α *au sens entrée-sortie.*

b) *S'il existe* $\beta > \alpha$ *tel que* (Σ) *soit Lyapunov-stable de degré* β, *alors l'équation* (7) *(en P) admet dans* $\mathscr{L}(E, E)$ *une solution unique positive; cette solution est définie positive (resp. coercive) si* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est fortement détectable de degré* α *(resp. si Q est coercif).*

Remarque : On peut utiliser le Théorème 2 pour obtenir une « première méthode de Lyapunov » conduisant à un résultat de stabilité locale de degré α dans le cas hilbertien. Toutefois, on peut préférer une approche directe, valable lorsque E est, plus généralement, un espace de Banach. En effet, en majorant $\| e^{(A+\alpha I)t} \|$ comme on le fait dans l'Annexe 3, puis en utilisant le Lemme de Gronwall, et en suivant la démarche exposée dans (Rouche, 1973), Chap. VII, § 7.7, on obtient le résultat suivant :

« Soit le système (Σ) décrit par l'équation différentielle $\dot{x}(t) = Ax(t) + f((x(t), t)$, $t \geqslant 0$, où $A \in \mathscr{L}(E, E)$ et où f est une fonction continue de $E \times R^+$ dans E. Supposons que A soit un « opérateur de stabilité de degré β », $\beta > \alpha$ (c'est-à-dire que le système décrit par l'équation différentielle $\dot{x}(t) = Ax(t)$ soit Lyapunov-stable de degré β). Supposons en outre que

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\| f(\xi, t) \|}{\| \xi \|} = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } t .$$

Alors, (Σ) est asymptotiquement stable de degré α. »

Ce résultat est à comparer avec le Théorème 3.3 de (Walker, 1980), Chap. IV, où est obtenue une stabilité exponentielle.

3.3. CAS D'UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE STATIONNAIRE

On considère maintenant le cas où $E = R^n$ et où F est l'opérateur défini dans l'Exemple 2 du § 2.3.3. On obtient le théorème suivant, démontré en Annexe 4 :

THÉORÈME 3 (Généralisation de la condition suffisante du Critère de Lyapunov) :

a) *Supposons que les mesures* $(T_{ij})_\alpha$ *(définies dans la Proposition 3) soient toutes bornées, et qu'il existe deux matrices semi-définies positives P et Q telles que* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *soit détectable de degré* α *et telles que* $\forall \omega \in R$:

$$(T^*(s) + \alpha I)\, P + P(\hat{T}(s) + \alpha I) \leqslant -\, Q\,(*) , \tag{8}$$

où $\hat{}$ *désigne la transformation de Laplace et où* $s = -\alpha + i\omega$. *Alors, l'origine de E est globalement attractive de degré* α *pour* (Σ).

b) *Si de plus* $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ *est fortement détectable de degré* α, *alors* (Σ) *est globalement asymptotiquement stable de degré* α.

c) *Enfin, si Q est définie positive, alors* (Σ) *est, de plus, stable de degré* α *au sens entrée-sortie.*
sortie.

d) *En particulier, dans le cas où* $n = 1$, *pour que* (Σ) *soit globalement asymptotiquement stable de degré* α *et stable de degré* α *au sens entrée-sortie, il suffit que*

$$\operatorname*{Sup}_{\omega \in R} \mathscr{R}_e[\, \hat{T}(-\alpha + i\omega)] < -\alpha .$$

Remarques :

1) Le théorème ci-dessus est une généralisation du Théorème 2 de (Bourlès, 1984), où seuls le cas $\alpha = 0$ et la stabilité asymptotique étaient envisagés.

2) Ce théorème généralise bien la condition suffisante du Critère de Lyapunov ; en effet, pour $T = A\delta$, où $A \in \mathscr{L}(E, E)$, l'équation (1) du système devient $\dot{x}(t) = Ax(t) + v(t)$ et l'inéquation (8) devient l'équation (7) (si l'on change le signe $\leqslant$ par le signe $=$).

3.4. EXEMPLES D'APPLICATION

On donne dans ce paragraphe deux exemples très simples qui montrent l'intérêt des résultats établis.

Exemple 1 :
Considérons le système d'équation :

$$\dot{x}(t) = a(x(t))\, x(t) + b \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\, x(\tau)\, d\tau + v(t),\ t \geqslant 0 ,$$

où $a : R \to R$ est une fonction continue et bornée, où $b \geqslant 0$ et où $\beta > \alpha$.

(*) Cette relation d'ordre, définie sur l'ensemble des matrices hermitiennes de dimension $n \times n$, est classique (voir par exemple (Bourlès, 1984)). Bien entendu, $\hat{T}^*$ désigne l'application $s \to \hat{T}(s)^*$.

i) *Cas où la fonction a est constante* :

On peut alors appliquer le Théorème 3, avec $T = a\delta + \varepsilon_\beta$, où la fonction ε_β est définie par $\varepsilon_\beta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e^{-\beta t}$ pour $t \geqslant 0$. On a donc $\hat{T}(s) = a + \frac{b}{s+\beta}$. La condition du Théorème 3, assurant la stabilité asymptotique de degré α et la stabilité entrée-sortie de degré α du système, s'écrit donc :

$$a + \frac{b}{\beta - \alpha} < -\alpha . \tag{9}$$

Dans le cas présent, on peut tout aussi bien raisonner sur la fonction de transfert du système d'entrée v et de sortie x. Cette fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{s+\beta}{s^2 + (\beta - a)\, s - (a\beta + b)} .$$

Bien évidemment, (Σ) est asymptotiquement stable de degré α et stable de degré α au sens entrée-sortie, si et seulement si tous les pôles de $H(s)$ sont à partie réelle strictement inférieure à $-\alpha$. Après un calcul (facile mais laborieux), on trouve que ceci équivaut précisément à la condition (9).

Ainsi, dans ce cas, le Théorème 3 donne une condition *nécessaire et suffisante* de stabilité de degré α. On peut noter sa rapidité d'application par rapport à la méthode utilisant la fonction de transfert.

ii) *Cas général* :

Dans le cas général, on ne peut plus appliquer le Théorème 3, puisque (Σ) est non linéaire. On peut toutefois procéder comme suit :

Soit F_1 l'opérateur défini par $[F_1(x)](t) = a(x(t))\, x(t)$ et $F_2 : x \to \varepsilon_\beta * x$. Le système obéit alors à une équation de la forme (1), avec $F = F_1 + F_2$. D'après le Théorème 1, il suffit, pour que ce système soit asymptotiquement stable de degré α et stable de degré α au sens entrée-sortie, qu'il existe $r > \alpha$ tel que :

$$\text{Graphe } F \subset \alpha\text{-sect}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & r \end{pmatrix}.$$

Pour que cette condition soit vérifiée, il suffit que pour $j = 1$ et 2

$$\text{Graphe } F_j \subset \alpha\text{-sect}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & r_j \end{pmatrix} \tag{10}$$

avec $r_1 + r_2 = r$.

D'après le Théorème 3 (ou plus exactement sa démonstration), la condition (10) est vérifiée avec $i = 2$ si $\sup_{\omega \in R} \mathcal{R}_e[\hat{\varepsilon}_\beta(-\alpha + i\omega)] \leqslant -r_2$, soit $b/(\beta - \alpha) \leqslant -r_2$.

D'autre part, il est immédiat que pour que la condition (10) soit vérifiée avec $i = 1$, il suffit que Sup (a) (c'est-à-dire la borne supérieure de la fonction a) soit inférieur ou égal à $-r_1$.

Donc, pour que le système envisagé ici soit asymptotiquement stable de degré α et stable de degré α au sens entrée-sortie, il suffit que :

$$\operatorname{Sup}(a) + \frac{b}{\beta - \alpha} < -\alpha .$$

Si a est une fonction constante, on retrouve la condition nécessaire et suffisante (9).

Dans ce cas, il est difficile de trouver une autre méthode qui mène à ce résultat. Bien entendu, on peut mettre le système sous forme d'état, mais se pose alors le difficile problème du choix de la fonction de Lyapunov.

Exemple 2 :

Considérons maintenant le système d'équation :

$$\dot{x}(t) = a(x(t))\, x(t) + bx(t - \tau) + v(t) , \quad t \geqslant 0 \tag{11}$$

où a est une fonction du même type que dans l'exemple précédent, et où b et τ sont des constantes positives ou nulles.

i) Dans le cas où a est constante, le Théorème 3 donne immédiatement comme condition suffisante de stabilité de degré α (asymptotique et entrée-sortie) :

$$a + b\, e^{\alpha\tau} < -\alpha . \tag{12}$$

Il est bien connu que pour que le système considéré ici soit asymptotiquement stable de degré α, il faut et il suffit que les racines de l'équation caractéristique qui lui est associée aient toutes une partie réelle strictement inférieure à $-\alpha$ (Hale, 1977). Cette équation caractéristique est : $s - a - b\, e^{-s\tau} = 0$. Posons $\sigma = s + \alpha$: la condition nécessaire et suffisante de stabilité de degré α est donc vérifiée si et seulement si les racines de l'équation $[\sigma - (a + \alpha)]\, e^{\sigma\tau} - b\, e^{\alpha\tau} = 0$ ont toutes une partie réelle strictement négative. On peut étudier la position des racines de cette équation par rapport à l'axe imaginaire en utilisant le Théorème de Hayes (voir (Hale, 1977), Appendice). On constate alors que dans le cas présent, la condition (12) est *nécessaire* et suffisante.

ii) Dans le cas général maintenant, en suivant la même démarche que pour l'Exemple 1, on parvient immédiatement à la conclusion que pour que le système décrit par l'équation (11) soit asymptotiquement stable de degré α et stable de degré α au sens entrée-sortie, il suffit que :

$$\text{Sup}\,(a) + b\,e^{\alpha\tau} < -\alpha\,.$$

L'autre méthode la mieux adaptée pour étudier la stabilité de ce système paraît être l'utilisation des théorèmes de Razumikhin (voir (Hale, 1977), Chap. 5); mais c'est au moins aussi difficile que de trouver une fonction de Lyapunov dans l'exemple précédent.

4. Conclusion

Deux théorèmes pratiques de stabilité de degré α ont été établis dans cet article : le Théorème 1, qui est le plus général, et le Théorème 3, qui concerne les systèmes intégro-différentiels linéaires stationnaires. Le Théorème 2, qui généralise le Critère de Lyapunov au cas hilbertien, paraît présenter un intérêt plus théorique. Deux exemples simples de systèmes intégro-différentiels ont été donnés qui illustrent l'intérêt des Théorèmes 1 et 3 : dans les cas envisagés, ces théorèmes donnent en effet très facilement des conditions de stabilité peu restrictives (et parfois nécessaires et suffisantes). Les autres méthodes existantes (Lyapunov ou Razumikhin) paraissent moins bien adaptées; elles supposent en effet de pouvoir choisir une fonction V convenable, et la réalisation de ce choix est très hypothétique (en outre, elles ne permettraient d'assurer que la stabilité interne).

Annexe 1 (Démonstration de la Proposition 3)

Par définition, la i-ième composante de $T * x$ est $y_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$, avec $y_{ij} = T_{ij} * x_j$. La fonction y_{ij} est définie presque partout d'après les conditions sur les supports de T_{ij} et x_j. D'autre part, on a $(y_{ij})_\alpha = (T_{ij})_\alpha * (x_j)_\alpha$. Soit P_t l'opérateur de troncature linéaire (Desoer, 1975); d'après la causalité de l'opérateur de convolution par $(T_{ij})_\alpha$, on a $P_t(y_{ij}) = P_t[(T_{ij})_\alpha * P_t(x_j)_\alpha]$. La fonction $P_t(x_j)_\alpha$ est de carré intégrable et la mesure $(T_{ij})_\alpha$ est bornée; on en déduit que $P_t(y_{ij})_\alpha$ est de carré intégrable et que :

$$\| P_t(y_{ij})_\alpha \| \leqslant \| (T_{ij})_\alpha \| \, \| P_t(x_j)_\alpha \| \,.$$

En appliquant successivement l'inégalité de Minkowski et l'inégalité de

Schwarz, on obtient :

$$\| P_t(y_i)_\alpha \|^2 \leqslant n \sum_{j=1}^{n} \| P_t(y_{ij})_\alpha \|^2 \,;$$

il vient donc finalement :

$$\| T * x \|^2_{t,\alpha} \leqslant n^2 \operatorname*{Max}_{i,j} \| T_{ij} \|^2_\alpha \, \| x \|^2_{t,\alpha} \,.$$

Annexe 2 (Démonstration du Théorème 1)

Soit

$$V(x_0, v, t) = e^{2\alpha t}(\varphi(x_0, v, t) \mid P\varphi(x_0, v, t)) \geqslant 0\,, \quad \text{et} \quad \dot{V}(x_0, v, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x_0, v, t)\,.$$

En écrivant que pour x_0 et v fixés on a (d'après le théorème de Lebesgue) :

$$V(x_0, v, t) = V(x_0, v, 0) + \int_0^t \dot{V}(x_0, v, \tau)\, d\tau\,,$$

on obtient :

$$(x_0 \mid Px_0) + 2 \langle \varphi(x_0, v, .), \alpha P\varphi(x_0, v, .) + PF(\varphi(x_0, v, .)) + Pv \rangle_{t,\alpha} \geqslant 0\,.$$

En utilisant l'hypothèse (ii), on obtient alors :

$$\langle \varphi(x_0, v, .), Q\varphi(x_0, v, .) \rangle_{t,\alpha} \leqslant (x_0 \mid Px_0) + 2 \langle \varphi(x_0, v, .), \ Pv \rangle_{t,\alpha}\,. \tag{13}$$

1) *Démonstration de* (a) :

D'après (13), il vient :

$$\| \sqrt{Q}\varphi(x_0, 0, .) \|^2_{t,\alpha} \leqslant \| P \| \, \| x_0 \|^2\,. \tag{14}$$

Par conséquent, $\sqrt{Q}\varphi(x_0, 0, .) \in L_2^E(\alpha)$. Donc, si l'on suppose $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ détectable de degré α, on a $\varphi(x_0, 0, .) \in L_2^E(\alpha)$, soit encore $\varphi_\alpha(x_0, 0, .) \in L_2^E$.

D'autre part, soit :

$$\dot{\varphi}(x_0, 0, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_0, 0, t),\ \psi(x_0, t) = e^{\alpha t}\,\dot{\varphi}(x_0, 0, t)$$

et

$$\dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, t) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(x_0, 0, t)\,.$$

On a $\dot{\varphi}(x_0, 0, .) = F(\varphi(x_0, 0, .))$. Puisque F est supposé à gain de degré α fini, il s'ensuit que $\psi(x_0, .) \in L_2^E$. Or,

$$\dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, .) = \alpha\varphi_\alpha(x_0, 0, .) + \psi(x_0, .) . \tag{15}$$

Donc, $\dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, .) \in L_2^E$. Du fait que $\varphi_\alpha(x_0, 0, .)$ et sa dérivée appartiennent à L_2^E, on déduit que cette fonction tend vers zéro à l'infini (Willems, 1971), ce qui est le résultat cherché.

2) *Démonstration de* (b) :

D'après (15), on a $\| \dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, .) \| \leqslant |\alpha| \| \varphi_\alpha(x_0, 0, .) \| + \| \psi(x_0, .) \|$. D'autre part, il existe par hypothèse $k \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ tels que (3) est vérifié. Il vient donc $\| \psi(x_0, .) \| \leqslant k \| \varphi_\alpha(x_0, 0, .) \| + b$, d'où finalement

$$\| \dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, .) \| \leqslant (k + |\alpha|) \| \varphi_\alpha(x_0, 0, .) \| + b .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\int_0^t (\varphi_\alpha(x_0, 0, \tau) \mid \dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, \tau))\, d\tau \leqslant \| \varphi_\alpha(x_0, 0, .) \|_t \| \dot{\varphi}_\alpha(x_0, 0, .) \|_t \leqslant$$
$$\leqslant (k + |\alpha|) \| \varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha^2 + b \| \varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha .$$

Donc :
$$\| \varphi_\alpha(x_0, 0, t) \|^2 \leqslant \| x_0 \|^2 + 2 \| \varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha [b + (k + |\alpha|) \| \varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha] .$$

D'autre part, l'inéquation (14) est toujours valable. En supposant $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ fortement détectable dé degré α, on établit donc très facilement maintenant que (Σ) est Lyapunov-stable de degré α, ce qui démontre la proposition (b).

3) *Démonstration de* (c) :

D'après (13) et l'inégalité de Schwarz :

$$\langle \varphi(x_0, v, .), Q\varphi(x_0, v, .) \rangle_{t,\alpha} \leqslant \| P \| \| x_0 \|^2 +$$
$$+ 2 \| \varphi(x_0, v, .) \|_{t,\alpha} \| P \| \; \| v \|_{t,\alpha} .$$

Si Q est coercif, il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall \xi \in E, \| \sqrt{Q}\xi \| \geqslant \sqrt{\gamma} \| \xi \|$, d'où :

$$\gamma \| \varphi(x_0, v, .) \|_{t,\alpha}^2 - 2 \| P \| \| v \|_{t,\alpha} \| \varphi(x_0, v, .) \|_{t,\alpha} \leqslant \| P \| \| x_0 \|^2 .$$

On en déduit facilement :

$$\| \varphi(x_0, v, .) \|_{t,\alpha} \leqslant \sqrt{\frac{\| P \|}{\gamma}} \| x_0 \| + 2 \frac{\| P \|}{\gamma} \| v \|_{t,\alpha} .$$

Le théorème est donc démontré.

Annexe 3 (Démonstration du Théorème 2)

La partie (a) est un simple cas particulier du Corollaire ; il suffit donc de démontrer la partie (b).

i) Soit $B(0, \eta)$, pour $\eta > 0$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon η dans E. Puisque par hypothèse (Σ) est Lyapunov-stable de degré β, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x_0, x_0 \in B(0, \eta) \Rightarrow \sup_{t \in R^+} \| e^{\beta t} e^{At} x_0 \| \leqslant 1$. Or, E est un espace de Baire, donc $B(0, \eta)$ n'est pas maigre. En appliquant le Théorème de Banach-Steinhaus (tel qu'il est énoncé dans (Bourbaki, 1981), p. 361), on en déduit donc que $k = \sup_{t \in R^+} \| e^{\beta t} e^{At} \| < + \infty$, et donc, en posant $\delta = \beta - \alpha > 0$, que $\forall t \geqslant 0$:

$$\| e^{(A + \alpha I)t} \| \leqslant k\, e^{-\delta t} . \tag{16}$$

Pour $t \geqslant 0$, soit $P(t)$ l'opérateur défini par :

$$P(t) = \int_0^t e^{(A + \alpha I)^* \tau} Q\, e^{(A + \alpha I)\tau} d\tau \geqslant 0 ;$$

d'après (16), il est immédiat que quand t tend vers $+ \infty$, $P(t)$ admet dans $\mathscr{L}(E, E)$ une limite $P = P(+ \infty)$. D'autre part, $P(t)$ vérifie l'équation :

$$(A + \alpha I)^* P(t) + P(t)(A + \alpha I) = e^{(A + \alpha I)^* t} Q\, e^{(A + \alpha I)t} - Q .$$

Par passage à la limite, on en déduit donc que $P \geqslant 0$ vérifie (7).

ii) Supposons maintenant $(\sqrt{Q}, (\Sigma))$ fortement détectable de degré α. Soit x_0 une condition initiale non nulle ; on a alors $\| \varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha \neq 0$. Or, on a d'après (13) $(x_0 \mid Px_0) \geqslant \| \sqrt{Q}\varphi(x_0, 0, .) \|_\alpha^2$ (avec en fait une égalité dans le cas présent). Donc, $(x_0 \mid Px_0)$ ne peut être nul, ce qui prouve que P est défini positif.

iii) Enfin, supposons Q coercif, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall \xi \in E, (\xi \mid Q\xi) \geqslant \gamma \| \xi \|^2$. On a alors :

$$(x_0 \mid Px_0) \geqslant \gamma \int_0^{+\infty} \| e^{(A + \alpha I)t} x_0 \|^2 dt \geqslant \| x_0 \|^2 \gamma \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\| e^{-(A + \alpha I)t} \|^2} .$$

iv) L'unicité de la solution se démontre comme dans (Kailath, 1980), p. 179, en remplaçant A par $A + \alpha I$.

Annexe 4 (Démonstration du Théorème 3)

Il suffit de démontrer que la condition (8) entraîne la condition (ii) du Théorème 1, soit encore $\forall t \geqslant 0$:

$$\int_0^t \Big(\varphi_\alpha(x_0, 0, \tau) \mid P[(T_\alpha * \varphi_\alpha(x_0, 0, .))(\tau) + \alpha \varphi_\alpha(x_0, 0, \tau)] + \\ + \frac{1}{2} Q \varphi_\alpha(x_0, 0, \tau) \Big) d\tau \leqslant 0 . \quad (17)$$

Soit $\varphi_{\alpha,t}(x_0, 0, .) = P_t\, \varphi_\alpha(x_0, 0, .)$. D'après la causalité de l'opérateur de convolution par T_α, on a :

$$P_t[(\varphi_\alpha(x_0, 0, .) \mid P[T_\alpha * \varphi_\alpha(x_0, 0, .)])] = (\varphi_{\alpha,t}(x_0, 0, .) \mid P[T_\alpha * \varphi_{\alpha,t}(x_0, 0, .)]) .$$

D'après le Théorème de Parseval, si on désigne par $X_{x_0,\alpha,t}$ la transformée de Fourier de $\varphi_{\alpha,t}(x_0, 0, .)$ et par $\tilde{T}_\alpha$ la transformée de Fourier de T_α, le premier membre de l'inégalité (17) est égal à :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{X}_{x_0,\alpha,t}(\omega) \mid [(\tilde{T}_\alpha^*(\omega) + \alpha I) P + P(\tilde{T}_\alpha(\omega) + \alpha I) + Q] X_{x_0,\alpha,t}(\omega))\, d\omega .$$

Or, $\tilde{T}_\alpha(\omega) = \hat{T}(s)$, avec $s = -\alpha + i\omega$. La condition (8) est donc suffisante pour que l'inégalité (17) soit vérifiée, ce qui démontre le théorème.

RÉFÉRENCES

V. Alexéev, V. Tikhomirov, S. Fomine (1982), *Commande optimale*, Mir.

N. Bourbaki (1981), *Espaces vectoriels topologiques*, Masson.

H. Bourlès (1981), *Sur la robustesse des régulateurs linéaires multivariables, optimaux pour une fonctionnelle de coût quadratique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, n° 22, 971-974.

H. Bourlès, O. L. Mercier (1982), *Marges de stabilité et robustesse structurelle généralisées des régulateurs linéaires quadratiques multivariables*, RAIRO Automatique, vol. 16, n° 1, 49-70.

H. Bourlès (1983), *Qualification et amélioration de la robustesse des régulateurs multivariables, avec application au pilotage d'un avion*, Thèse de Docteur-Ingénieur, I.N.P.G.-ONERA (Grenoble, 1982) ; N.T. ONERA n° 1983-2.

H. Bourlès (1984), *Stabilité des systèmes linéaires perturbés. Robustesse*, RAIRO Automatique, vol. 18, n° 3, 297-314.

C. A. Desoer, M. Vidyasagar (1975), *Feedback Systems : Input-output properties*, Academic Press.

A. Feintuch, R. Saeks (1982), *System Theory : a Hilbert Space Approach*, Academic Press.

J. Hale (1977), *Theory of Functional Differential Equations*, Springer Verlag.

Y. Joannic, O. L. Mercier (1983), *Quantification de la robustesse des systèmes non linéaires à commande échantillonnée et à perturbations dynamiques*, Rech. Aérosp., n° 6.

Y. Joannic (1984), *La robustesse des systèmes dynamiques à temps discret. Application au pilotage numérique multivariable des avions d'armes*, Thèse de Docteur-Ingénieur, I.D.N.-ONERA (Lille, 1983) ; N.T. ONERA n° 1984-2.

T. Kailath (1980), *Linear Systems*, Prentice-Hall.

L. V. Kantorovitch, G. P. Akilov (1981), *Analyse fonctionnelle*, Mir.

N. Rouche, J. Mawhin (1973), *Equations différentielles ordinaires* (tome 2), Masson.

M. G. Safonov, M. Athans (1977), *Gain and Phase Margin for Multiloop L.Q.G. Regulators*, IEEE Trans., vol. AC-22, n° 2, 173-179.

M. G. Safonov (1980), *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, M.I.T. Press.

M. Vidyasagar (1978), *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall.

M. Vidyasagar (1981), *Input-output Analysis of Large-Scale Interconnected Systems*, Springer Verlag.

J. A. Walker (1980), *Dynamical Systems and Evolution Equations*, Plenum Press.

J. C. Willems (1971), *The Analysis of Feedback Systems*, M.I.T. Press.

W. M. Wonham (1979), *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*, Springer Verlag.